

Introduction au dimensionnement aéroélastique des ailes

28 janvier 2018

L'aéroélasticité s'intéresse au comportement statique et dynamique d'une structure flexible, ici une aile d'avion, soumise à un écoulement d'air.

Il s'agit d'un problème couplé fluide-structure pour lequel la structure est caractérisée par sa raideur élastique, son inertie (masse et moment d'inertie), éventuellement sa capacité à amortir le mouvement (coefficient d'amortissement). Le chargement fluide est quand à lui dépendant des caractéristiques aérodynamiques de l'aile, du mouvement de la structure et des conditions atmosphériques de vol.

Dans le cadre de cette étude on assimilera l'aile à un système à deux degrés de liberté correspondant aux deux premiers modes de vibration en flexion et torsion. On utilisera également une approche "sectionnelle" 2D où l'aile est considérée comme un section rigide élastiquement supportée.

L'extension au cas 3D peut être effectué dans le cadre d'une approche modale.

On s'intéresse ici à deux situations génériques :

1. le cas d'une section d'aile à deux degrés de liberté soumise à un écoulement de vitesse moyenne U , sans turbulence. On cherchera à identifier les vitesses critiques pour le phénomène de divergence en torsion et le flottement couplé flexion-torsion ;
2. le cas d'une section d'aile sous écoulement turbulent. On s'intéressera à la réponse dynamique du système soumis à un chargement instationnaire lié au caractère instationnaire du module et de la direction de la vitesse de l'écoulement (turbulence atmosphérique, rafale de vent).

1 Définitions et notations

On définit tableau 1 et figure 1 le système aéroélastique étudié.

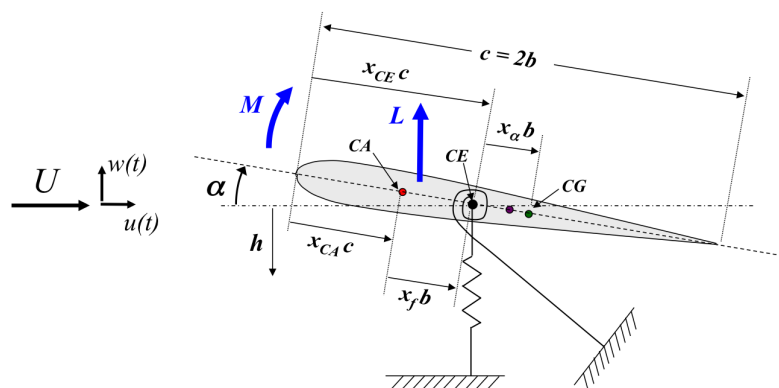


FIGURE 1 – Modèle aéroélastique 2D à deux degrés de libertés flexion-torsion

TABLE 1 – Distances relatives

x_{CE}	Distance relative (par rapport à la corde) du bord d'attaque au centre élastique (CE)
x_{CA}	Distance relative (par rapport à la corde) du bord d'attaque au foyer (CA)
x_f	Distance relative (par rapport à la demi-corde) du foyer (CE) au centre élastique (CE)
x_α	Distance relative (par rapport à la demi-corde) du centre élastique (CE) au centre de gravité (CG)

2 Divergence en torsion - flottement couplé flexion-torsion

2.1 Position du problème - approche 2D

Considérons une section d'aile dont le mouvement est défini par deux variables de déplacement : la translation verticale de flexion $h(t)$ et la rotation de torsion $\alpha(t)$.

REMARQUE : conventionnellement le mouvement de pompage est défini comme positif vers le bas et le mouvement de rotation positif cabreur.

L'équation du mouvement de l'aile est donnée par :

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + D_h\dot{h} + K_h h + S_\alpha\ddot{\alpha} &= -L \\ I_\alpha\ddot{\alpha} + D_\alpha\dot{\alpha} + K_\alpha\alpha + S_\alpha\ddot{h} &= M \end{aligned} \quad (1)$$

Où m , I_α , D_h , D_α , K_h , K_α sont les paramètres de masse, de moment d'inertie, d'amortissement et de raideur en flexion et rotation.

S_α est le moment statique de l'aile défini comme la masse de l'aile m multiplié par la distance du centre élastique au centre de gravité $x_\alpha b$. Son signe dépend de la position du centre de gravité par rapport au centre élastique (positif si le centre de gravité est en aval du centre élastique, négatif dans le cas contraire).

$$S_\alpha = mx_\alpha b \quad (2)$$

S_α est un paramètre très important pour l'étude du flottement dans la mesure où il introduit un couplage structurel des équations du mouvement.

L et M sont respectivement la portance et le moment aérodynamique (défini par rapport au centre élastique). Nous verrons plus tard que la portance et le moment introduisent également un couplage des équations du mouvement.

L'équation 1 peut être formulée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{h} + 2\eta_h\omega_h\dot{h} + \omega_h^2 h + x_\alpha b\ddot{\alpha} &= -\frac{L}{m} \\ \ddot{\alpha} + 2\eta_\alpha\omega_\alpha\dot{\alpha} + \omega_\alpha^2\alpha + x_\alpha b\frac{m}{I_\alpha}\ddot{h} &= \frac{M}{I_\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

Où ω_h , ω_α sont les fréquences propres et η_h , η_α les coefficient d'amortissement réduit associés au premier mode de flexion et de torsion de l'aile.

$$\omega_h = \sqrt{\frac{K_h}{m}}, \quad \eta_h = \frac{D_h}{\sqrt{K_h m}}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{I_\alpha}}, \quad \eta_\alpha = \frac{D_\alpha}{\sqrt{K_\alpha I_\alpha}}. \quad (4)$$

REMARQUE : on vérifie facilement que ces fréquences propres sont celle du système 1 sans chargement aérodynamique et sans couplage structurel $S_\alpha = 0$.

Dans la suite on négligera les termes d'amortissement du système dynamique.

2.2 Modélisation du chargement aérodynamique

La portance et le moment aérodynamique peuvent être modélisés de façon plus ou moins complexe.

Le modèle le plus simple est un modèle quasi-statique pour lequel le chargement aérodynamique n'est fonction que l'angle d'attaque géométrique de l'aile par rapport à la direction moyenne de l'écoulement :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho U^2 S [C_L(\alpha)] \\ M &= \frac{c}{2}\rho U^2 S c [C_M(\alpha)] \end{aligned} \quad (5)$$

Où ρ est la masse volumique de l'air, U la vitesse de l'écoulement, $S = c \times E$ la surface de référence de l'aile (avec c la corde et E l'envergure de l'aile). C_L et C_M sont les coefficients de portance et de moment aérodynamique (défini par rapport au centre élastique).

L'étude de stabilité du système dynamique peut alors être effectuée en linéarisant le chargement autour d'une incidence moyenne α_m :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho U^2 S [C_L(\alpha_m) + \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)\alpha] \\ M &= \frac{c}{2}\rho U^2 S c [C_M(\alpha_m) + \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)\alpha] \end{aligned} \quad (6)$$

Où $\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)$ et $\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)$ sont respectivement la dérivée du coefficient de portance et de moment autour de l'angle moyen α_m .

Dans la suite on utilisera une expression de $\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)$ en fonction de $\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)$ et de la position relative du centre élastique par rapport au foyer aérodynamique de l'aile :

$$\frac{dC_M}{d\alpha} = \frac{x_f}{2} \frac{dC_L}{d\alpha}, \quad x_f = 2(x_{CE} - x_{CA}) \quad (7)$$

RAPPEL : le foyer aérodynamique de l'aile peut être identifié connaissant la force de portance et le moment au quart de corde :

$$x_{CA} = \frac{1}{4} - \frac{dC_{M_{1/4}}}{dC_L} \quad (8)$$

2.3 Analyse de stabilité - identification des vitesses critiques

2.3.1 Divergence en torsion

Le phénomène de divergence en torsion est une instabilité dite « statique » pouvant conduire à la destruction rapide de l'aile. Le scénario conduisant à cette instabilité peut être résumé comme suit : la déformation en torsion de l'aile induit un chargement aérodynamique selon un scénario de type « raideur ajoutée négative ». Au delà d'une certaine vitesse critique, le système aéroélastique n'a plus de raideur et il se déforme jusqu'à la rupture !

En ne considérant que l'équation du mouvement de torsion, le système dynamique 1 (sans amortissement) devient :

$$I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = \frac{1}{2}\rho U^2 S c [C_M(\alpha_m) + \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)\alpha] \quad (9)$$

Que l'on peut écrire :

$$I_\alpha \ddot{\alpha} + (K_\alpha - \frac{1}{2}\rho U^2 S c \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)) \alpha = \frac{1}{2}\rho U^2 S c [C_M(\alpha_m)] \quad (10)$$

où $K = K_\alpha - \frac{1}{2}\rho U^2 S c \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)$ est la raideur totale du système fluide-structure.

Si $\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right) > 0$ alors il existe une vitesse critique au delà de laquelle le système n'a plus de raideur :

$$U_c = \sqrt{\frac{2K_\alpha}{\rho S c \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)}} \quad (11)$$

2.3.2 Le flottement couplé flexion-torsion

Il s'agit d'une instabilité dynamique résultant d'un couplage élastique (flexion-torsion) et aérodynamique. Le chargement aérodynamique modifie les modes propres du système couplé (formes, fréquences). L'instabilité se produit, au delà d'une certaine vitesse critique, sur un mode combiné (flexion/torsion) capable d'extraire de l'énergie à l'écoulement. En utilisant le modèle quasi-statique linéaire pour la portance et le moment, le système fluide structure devient (on néglige ici le chargement moyen, inutile pour une étude de stabilité) :

$$\begin{aligned}\ddot{h} + \omega_h^2 h + x_\alpha b \ddot{\alpha} &= -\frac{\rho U^2 S}{2m} \left[\left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right) \alpha \right] \\ \ddot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha + x_\alpha b \frac{m}{I_\alpha} \ddot{h} &= \frac{\rho U^2 S c}{2I_\alpha} \left[\left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \alpha \right]\end{aligned}\quad (12)$$

En posant : $q = \frac{1}{2} \rho U^2$ et $b = \frac{c}{2}$ (la demi corde) et en utilisant la relation 7, le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\ddot{h} + \omega_h^2 h + x_\alpha b \ddot{\alpha} &= -\frac{qS}{m} \left[\left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right) \alpha \right] \\ \ddot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha + x_\alpha b \frac{m}{I_\alpha} \ddot{h} &= \frac{qS}{I_\alpha} x_f \left[\left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \alpha \right]\end{aligned}\quad (13)$$

L'analyse de stabilité du système se fait en recherchant les solutions complexe de la forme :

$$\begin{aligned}h(t) &= \tilde{h} e^{pt+\varphi} \\ \alpha(t) &= \tilde{\alpha} e^{pt}\end{aligned}\quad (14)$$

où p est une pulsation complexe : $p = p_R + i\omega$

REMARQUE : La solution physique correspondant à 14 s'écrit :

$$\begin{aligned}h(t) &= \tilde{h} e^{p_R t} \cos(\omega t + \varphi) \\ \alpha(t) &= \tilde{\alpha} e^{p_R t} \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (15)$$

Si $\omega \neq 0$ les mouvements de flexion et torsion sont donc harmoniques et seront amortis si $p_R < 0$ et amplifiés si $p_R > 0$

En substituant la solution 14 dans 13 on obtient (sous forme matricielle) :

$$\begin{bmatrix} [p^2 + \omega_h^2] & [x_\alpha b p^2 + \frac{qS}{m} \frac{dC_L}{d\alpha}] \\ [x_\alpha b \frac{m}{I_\alpha} p^2] & [p^2 + \omega_\alpha^2 - \frac{qS x_f}{I_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (16)$$

Ce système admet des solution non nulles ($h(t) \neq 0, \alpha(t) \neq 0$) si son déterminant est nul :

$$\left[1 - x_\alpha^2 \frac{b^2 m}{I_\alpha} \right] p^4 + \left[\omega_\alpha^2 \left(1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \right) - \frac{qS x_f}{I_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha} - \frac{qS}{I_\alpha} x_\alpha b \frac{dC_L}{d\alpha} \right] p^2 + \left[\omega_h^2 \left(\omega_\alpha^2 - \frac{qS x_f}{I_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha} \right) \right] = 0\quad (17)$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\underbrace{\left[1 - \frac{x_\alpha^2}{r_g^2} \right]}_A \left(\frac{p}{\omega_\alpha} \right)^4 + \underbrace{\left[(1 + \Omega^2) - \frac{qS b}{K_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha} (x_\alpha + x_f) \right]}_B \left(\frac{p}{\omega_\alpha} \right)^2 + \underbrace{\Omega^2 \left[1 - \frac{qS b}{K_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha} x_f \right]}_C = 0\quad (18)$$

en utilisant la relation $K_\alpha = \omega_\alpha^2 I_\alpha$ et en introduisant les deux paramètres adimensionnelles :

- $\Omega = \frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$, le rapport des fréquences propres en flexion et torsion
- $r_g = \sqrt{\frac{I_\alpha}{m b^2}}$, le rayon de gyration par rapport au centre élastique

En posant $X = \left(\frac{p}{\omega_\alpha}\right)^2$ les solutions de l'équation 18 s'écrivent :

$$X_1 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} \quad X_2 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} \quad (19)$$

où $\Delta = B^2 - 4AC$ est le discriminant de l'équation 18.

Si $\Delta \geq 0$ les solutions X_1 et X_2 sont réelles. En règle générale les trois coefficients A , B et C sont tous positifs. Si les solutions X_1 et X_2 sont réelles, elles sont donc de même signe et négatives.

Ce qui conduit aux solutions suivantes pour p :

$$p_1 = \pm i\sqrt{|X_1|} \quad p_2 = \pm i\sqrt{|X_2|} \quad (20)$$

Les solutions sont donc de type sinusoïdal. Dans la réalité elles sont également amorties par l'amortissement structural en flexion et torsion (que nous avons négligés dans cette étude de stabilité)

Si $\Delta < 0$ les solutions X_1 et X_2 sont complexes et les solutions sont de type :

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= p_R + i\omega & p_{1,2} &= -p_R - i\omega \\ p_{2,1} &= -p_R + i\omega & p_{2,2} &= p_R - i\omega \end{aligned} \quad (21)$$

avec $p_R > 0$ et $\omega > 0$

Les deux solutions $p_{1,1}$ et $p_{2,2}$ sont complexes conjuguées avec une partie réelle positive. Elle caractérise un mode instable.

Les deux autres solutions $p_{1,2}$ et $p_{2,1}$ sont également complexes conjuguées avec une partie réelle négative. Elle caractérise un mode stable.

Concrètement un mode instable et un mode vibratoire couplant flexion et torsion avec un déphasage et une amplitude relative tels qu'un transfert d'énergie du fluide vers ce mode vibratoire est possible.

Le mode stable est l'autre solution du système dynamique mais le déphasage et l'amplitude relative associés sont tels que le mouvement sous écoulement est amorti.

On notera également que lorsque le système devient instable il n'existe plus qu'une seule fréquence propre (la même pour le mode stable et le mode instable). Il est alors courant de dire que le flottement est une instabilité par confusion de fréquence, c'est-à-dire que les deux fréquences initiales du système évoluent avec la vitesse pour se confondre à la vitesse critique.

En posant :

$$Q = \frac{qSb}{K_\alpha} \frac{dC_L}{d\alpha} \quad (22)$$

On peut montrer que la condition pour qu'une instabilité existe est telle que :

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0 \iff Q_1 \leq Q \leq Q_2 \quad (23)$$

où

$$Q_{1,2} = \frac{\left\{ \left[(1 + \Omega^2) (x_\alpha + x_f) - 2x_f\Omega^2 \left(1 - \frac{x_\alpha^2}{r_g^2} \right) \right] \pm 2\sqrt{x_\alpha\Omega^2 \left(1 - \frac{x_\alpha^2}{r_g^2} \right) \left(x_\alpha + x_f \left[1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{x_f x_\alpha}{r_g^2} \right) \right] \right)} \right\}}{(x_\alpha + x_f)^2} \quad (24)$$

La vitesse critique de l'instabilité de flottement flexion-torsion est donc donnée par :

$$U_c = \sqrt{\frac{2Q_1 K_\alpha}{\rho S b \frac{dC_L}{d\alpha}}} \quad (25)$$

3 Réponse à la turbulence

Le problème à résoudre est celui d'un système dynamique, l'aile d'avion, soumis à une excitation extérieur : le chargement aérodynamique induit par la turbulence de l'écoulement. Pour résoudre le problème on se place sous les hypothèse simplificatrices suivantes :

- le vent turbulent est uniforme à l'échelle du tablier (approche 2D) ;
- le mouvement de la structure ne modifie pas le chargement aérodynamique ;
- le chargement aérodynamique s'adapte instantanément à chaque condition de vent

PRINCIPE DE MODÉLISATION : on utilise les coefficients aérodynamiques stationnaires de l'aile en faisant intervenir :

- le module instantané de la vitesse du vent turbulent
- l'angle instantané du vent par rapport à l'aile

$$\left\{ \begin{array}{l} C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \\ C_L = C_L(\alpha) \end{array} \right\} \rightarrow L(t) = \frac{1}{2}\rho V(t)^2 S \times C_L(\alpha_V(t)) \quad (26)$$

Le module et l'angle instantané de la vitesse de l'écoulement peuvent être approchés (à l'ordre 1) :

$$\begin{aligned} V(t)^2 &= (U + u(t))^2 + w(t)^2 \rightarrow V(t)^2 \simeq U^2 + 2Uu(t) \\ \tan(\alpha_V(t)) &= \frac{w(t)}{U} \rightarrow \alpha_V(t) \simeq \frac{w(t)}{U} \end{aligned} \quad (27)$$

On en déduit une expression au premier ordre pour la portance instationnaire :

$$L(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 S \left[\left(1 + 2\frac{u(t)}{U}\right) C_L(\alpha_m) + \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right) \frac{w(t)}{U} \right] \quad (28)$$

En suivant le même raisonnement on obtient une expression au premier ordre pour le moment instationnaire :

$$M(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 S c \left[\left(1 + 2\frac{u(t)}{U}\right) C_M(\alpha_m) + \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right) \frac{w(t)}{U} \right] \quad (29)$$

Connaissant les performances aérodynamique de l'aile, $C_L(\alpha_m)$, $\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)$, $C_M(\alpha_m)$, $\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)$ et avec une description temporelle du vent turbulent, $u(t)$, $w(t)$, on peut donc calculer la réponse vibration en flexion et/ou torsion en intégrant le système :

$$\begin{aligned} \ddot{h} + 2\eta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h + x_\alpha b \ddot{\alpha} &= -\frac{\rho U^2 S}{2m} \left\{ C_L(\alpha_m) + \left[2C_L(\alpha_m) \frac{u(t)}{U} + \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right) \frac{w(t)}{U} \right] + \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right) \alpha \right\} \\ \ddot{\alpha} + 2\eta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha + x_\alpha b \frac{m}{I_\alpha} \ddot{h} &= \frac{\rho U^2 S c}{2I_\alpha} \left\{ C_M(\alpha_m) + \left[2C_M(\alpha_m) \frac{u(t)}{U} + \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right) \frac{w(t)}{U} \right] + \left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right) \alpha \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Pour lequel le premier membre du chargement aérodynamique correspond au chargement moyen lié à l'angle d'attaque moyen de l'aile, le second au chargement turbulent et le troisième au chargement induit par le mouvement de l'aile (modèle quasi-statique simplifié utilisé pour l'étude du flottement)

Des modèle plus complexes et plus précis ont été développés. Pour aller plus loin on pourra consulter : [Fung(1993), Bisplinghoff and Ashley(1962)].

Références

[Bisplinghoff and Ashley(1962)] Bisplinghoff, R., Ashley, H., 1962. Principles of aeroelasticity.

[Fung(1993)] Fung, Y. C., 1993. An introduction to the theory of aeroelasticity. Dover Publications Inc., New York.