Notions de Thermodynamique et Transferts thermiques

2eme partie

Objectifs:

- ✓ Notions fondamentales de la thermodynamique.
- ✓ Bilans thermiques et transferts de la chaleur
- ✓ Introduction à la résolution numérique des problèmes de thermique.

Durée: 32H

Cours MECAVENIR 2010

S.Marié

simon.marie@cnes.fr

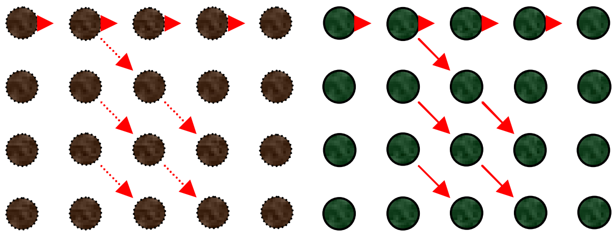
CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES SPATIALES

Programme

- **Chap 1: 1er et 2nd principe**
  - Énergie interne
  - Quantité de chaleur
  - Loi des gaz parfaits
  - Entropie
- **Chap 2: Systèmes ouverts**
  - Puissance d'une installation
  - Principe de conservation
- **Chap 3: Systèmes minces**
  - Flux de chaleur
  - Bilan énergétique
- **Chap 4: Transferts thermiques**
  - Conduction
  - Convection
  - Rayonnement
- **Chap 5: Notion d'isolation**
  - Réglementation
  - Les paramètres importants
  - Les différents types d'isolation
  - Quelques matériaux
- **Chap 6: Équation de la chaleur**
  - 1d,2d
  - Application aux ailettes et échangeurs.
- **Chap 7: Méthodes numériques pour l'équation de la chaleur 1D**
  - Discrétisation
  - Stabilité
  - DM

Chapitre 4 Transferts Thermiques

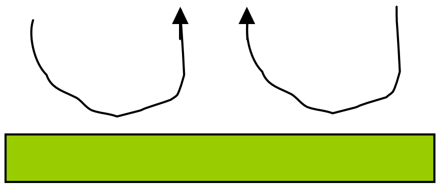
Différent mode de transfert de la chaleur sont possible dans la nature :



Conduction

Loi de Fourier

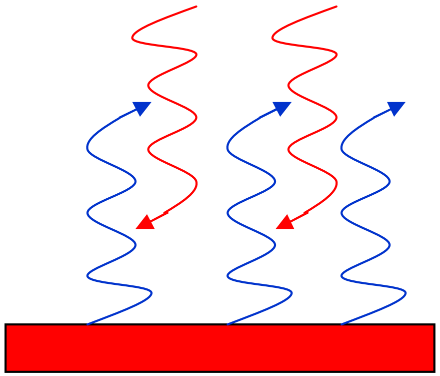
$$\boxed{\overrightarrow{q}_{cond} = -\lambda \overrightarrow{grad} T}$$



Convection

Loi de Newton

$$\boxed{\overrightarrow{q}_{conv} = h(T_w - T_e)\overrightarrow{n}}$$



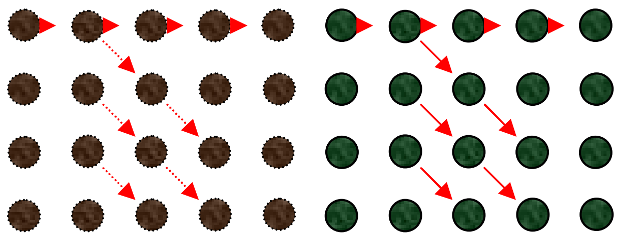
Rayonnement

Loi de Stephan-Boltzmann

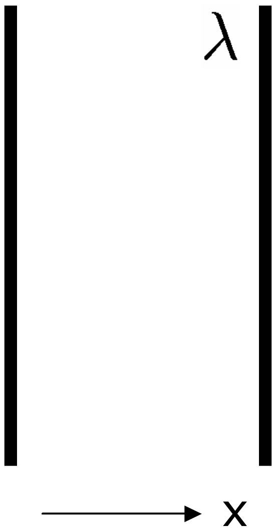
$$\boxed{\overrightarrow{q}_{ray} = \epsilon\sigma(T_s^4 - T_e^4)\overrightarrow{n}}$$

I. Conduction

Transmission de la chaleur de proche en proche au sein du milieu.



Approche à 1 dimension :



$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Coefficient de conductivité thermique.

On a la relation: $\Phi = S\varphi$

Cas général:

Loi de Fourier

$$\boxed{\overrightarrow{q}_{cond} = -\lambda \overrightarrow{grad}T}$$

Flux de conduction à travers la surface S: $\overrightarrow{\Phi} = -\lambda S \overrightarrow{grad}T$

Le signe moins indique que les flux de conduction sont dirigés dans le sens des températures décroissantes.

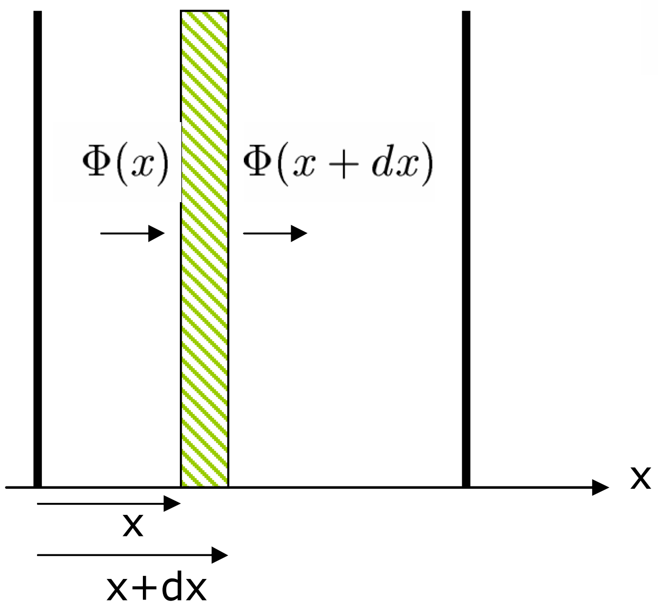
I. Conduction

Ordre de grandeur de λ		Matériaux	λ $Wm^{-1}K^{-1}$	Diffusivité thermique m^2s^{-1} $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$
0.01		air	$2.5\ 10^{-2}$	$2\ 10^{-5}$
	gaz			
0.1		bois	0.13	$2.4\ 10^{-7}$
	liquides	glycérine	0.29	$0.98\ 10^{-7}$
		eau	0.60	$1.44\ 10^{-7}$
1				
		mercure	8.0	$4.2\ 10^{-6}$
		granit	2.51	$1.1\ 10^{-6}$
100	métaux	acier	46	$1.2\ 10^{-5}$
		alu	200	$0.86\ 10^{-4}$
		argent	418	$1.71\ 10^{-4}$

V

I. Conduction

Modèles élémentaires



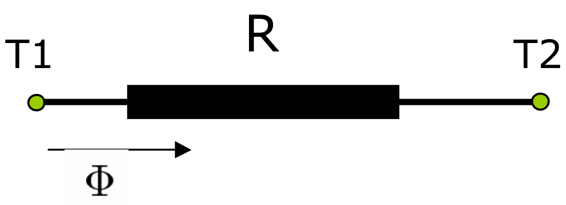
$$\Phi(x) - \Phi(x+dx) = 0$$

$$d\Phi(x) = 0 \longrightarrow \boxed{\Phi = \frac{S(T_1 - T_2)}{e/\lambda}}$$

$$\Phi(x) = Cste = \Phi$$

Expression de la résistance thermique: $\boxed{R_{th} = \frac{e}{S\lambda}}$

Analogie Electrique:

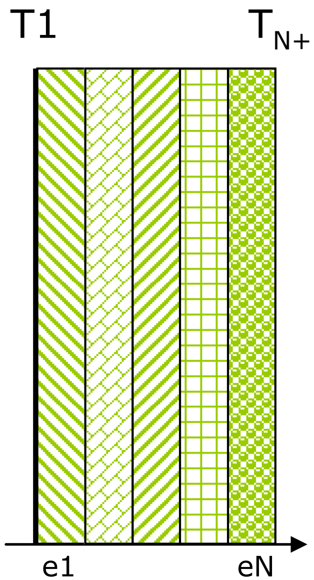


Electricité		Thermique
U (V)	⟷	T1 – T2 (K)
I (A)	⟷	Φ (W)
R (Ohm)	⟷	Rth (K.W^{-1})

I. Conduction

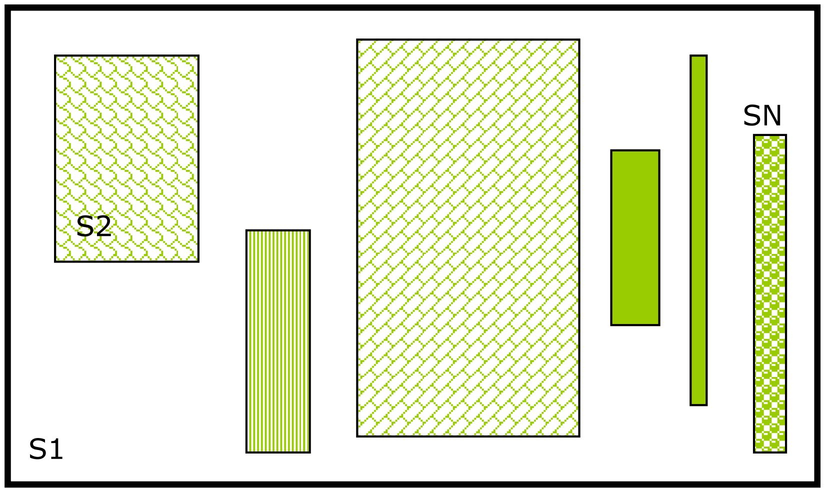
Modèles élémentaires

Cas de N couches en série:



$$R_{th} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{\lambda_i}$$

Cas de N couches en //:

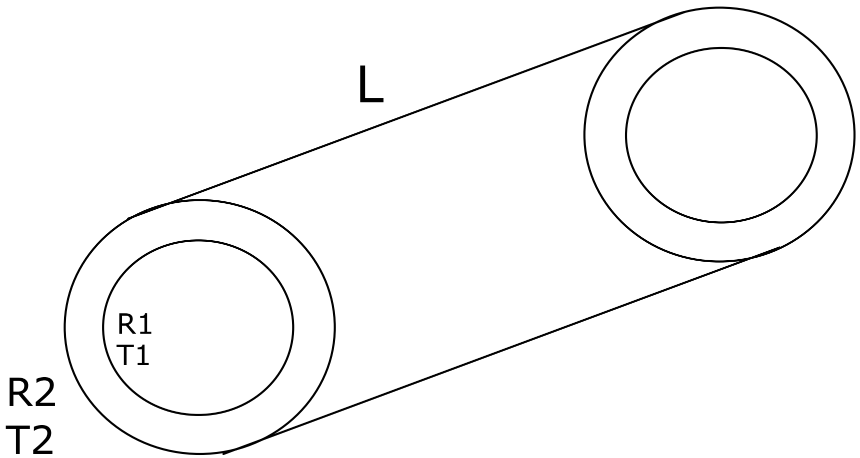


$$\frac{1}{R_{th}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i^{th}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{S_i\lambda_i}{e_i}$$

I. Conduction

Modèles élémentaires

Cas du cylindre creux:



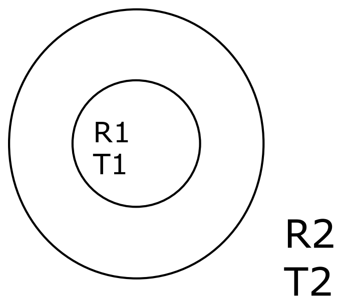
Bilan

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda L(T_1 - T_2)}{ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]}$$

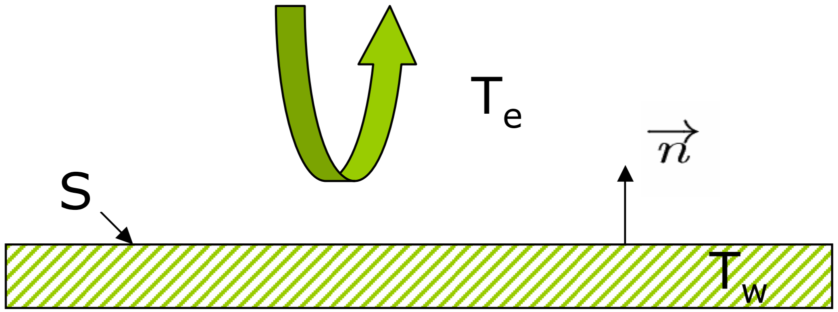
$$\boxed{R_{th} = \frac{ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]}{2\pi\lambda L}}$$

Cas de la sphère creuse:

$$\boxed{R_{th} = \frac{\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}{4\pi\lambda}}$$



II. Convection



$$\boxed{\vec{q}_{conv} = h(T_w - T_e)\vec{n}}$$

$$\Phi = hS(T_w - T_e)$$

h: coefficient d'échange par convection (W/m²/K)

Résistance thermique de convection:

$$R_{th}^{conv} = \frac{1}{hS}$$

Coefficient d'échange

R en K / W.

Nombre de Prandtl:

$$P_r = \frac{\nu}{a}$$

Viscosité cinématique

Diffusivité thermique

Rapport entre les effets hydrodynamiques (viscosité) et les effets thermiques (diffusivité)

Nombre de Biot:

$$Bi = \frac{R_{th}^{cond}}{R_{th}^{conv}} = \frac{eh}{\lambda}$$

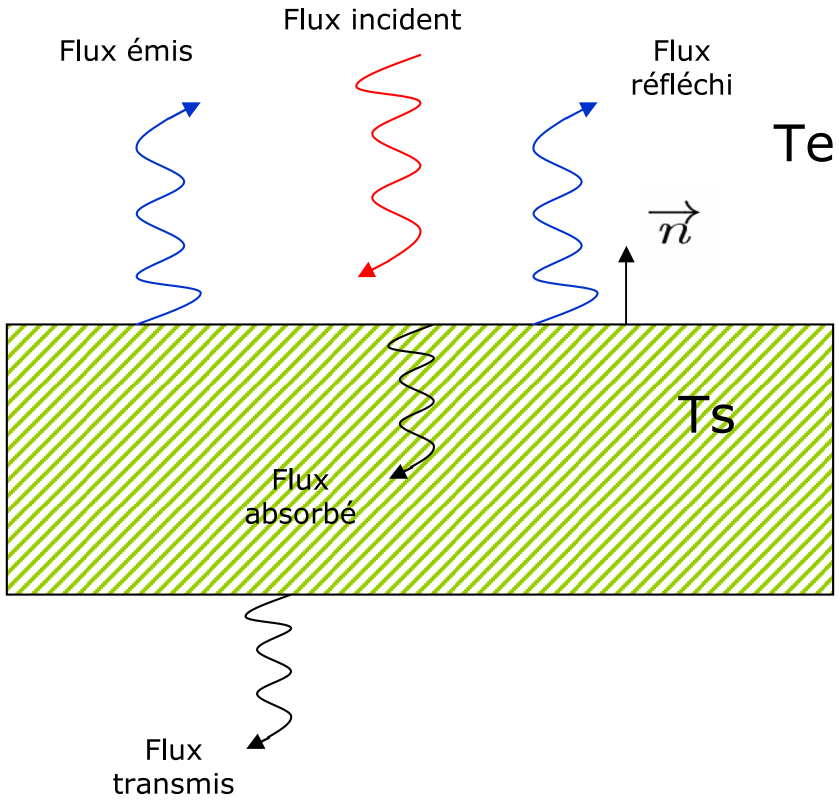
Épaisseur de conduction

Coefficient d'échange

Conductivité thermique

Rapport entre les échanges par convection et les échanges par conduction

III. Rayonnement



Le flux totale dans le cas générale s'écrit:

$$\boxed{\vec{q}_{ray} = \epsilon\sigma(T_s^4 - T_e^4)\vec{n}}$$

Emission du Corps Noir:

Un corps noir est un corps qui absorbe la totalité du flux incident. Le flux émis par ce corps à une température T s'écrit:

$$\vec{q_n} = \sigma T^4 \vec{n}$$

Constante de Stephan-Boltzmann: σ =5.67 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}

Pour les matériaux ordinaires, on définit un facteur d'émission (ou émissivité): 0< ϵ<1

Si les écarts de températures (Ts-Te) ne sont pas trop grand, on peut définir un coefficient d'échange par rayonnement :

$$h_r = 4\varepsilon\sigma T_e^3$$

Et donc une résistance thermique de rayonnement:

$$\boxed{R_{th}^{ray} = \frac{1}{h_r S}}$$

III. Rayonnement

Eléments sur la loi de Wien:

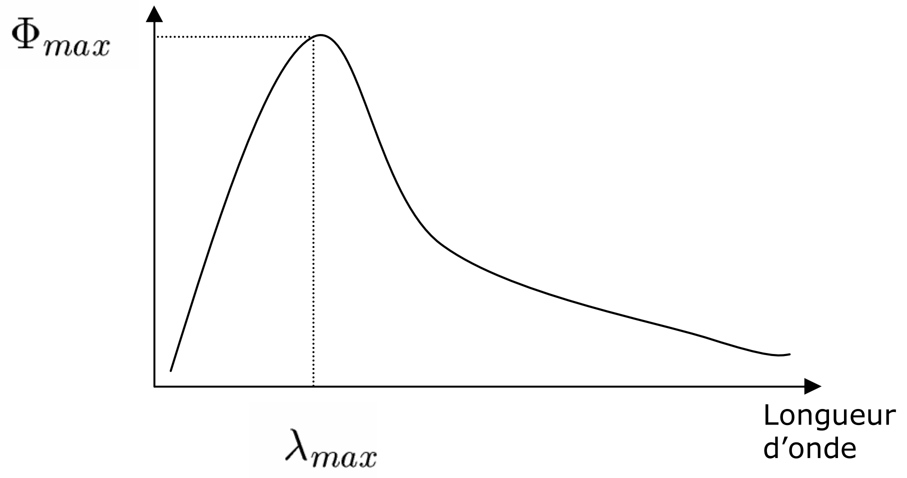
Un corps noir émet de la lumière (chaleur) dans toutes les longueurs d'onde. Pour une température donnée, le flux émis présente un maximum pour une longueur d'onde particulière.

Cette longueur d'onde est fonction de la température. Leur relation est donnée par la loi de Wien:

$$\boxed{\lambda_{max} T = C}$$

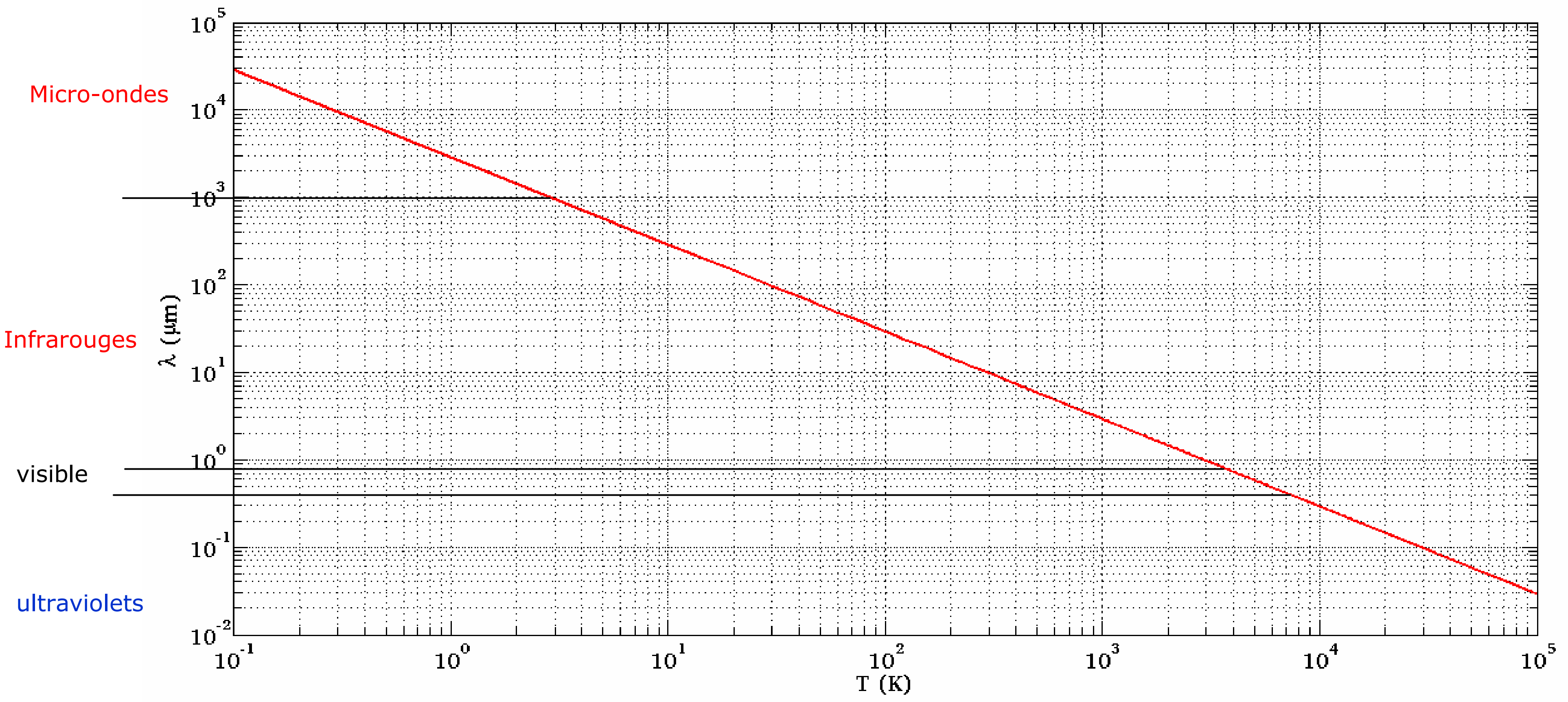
C=2898 10^{-6} m.K

Flux émis par rayonnement à T donnée



III. Rayonnement

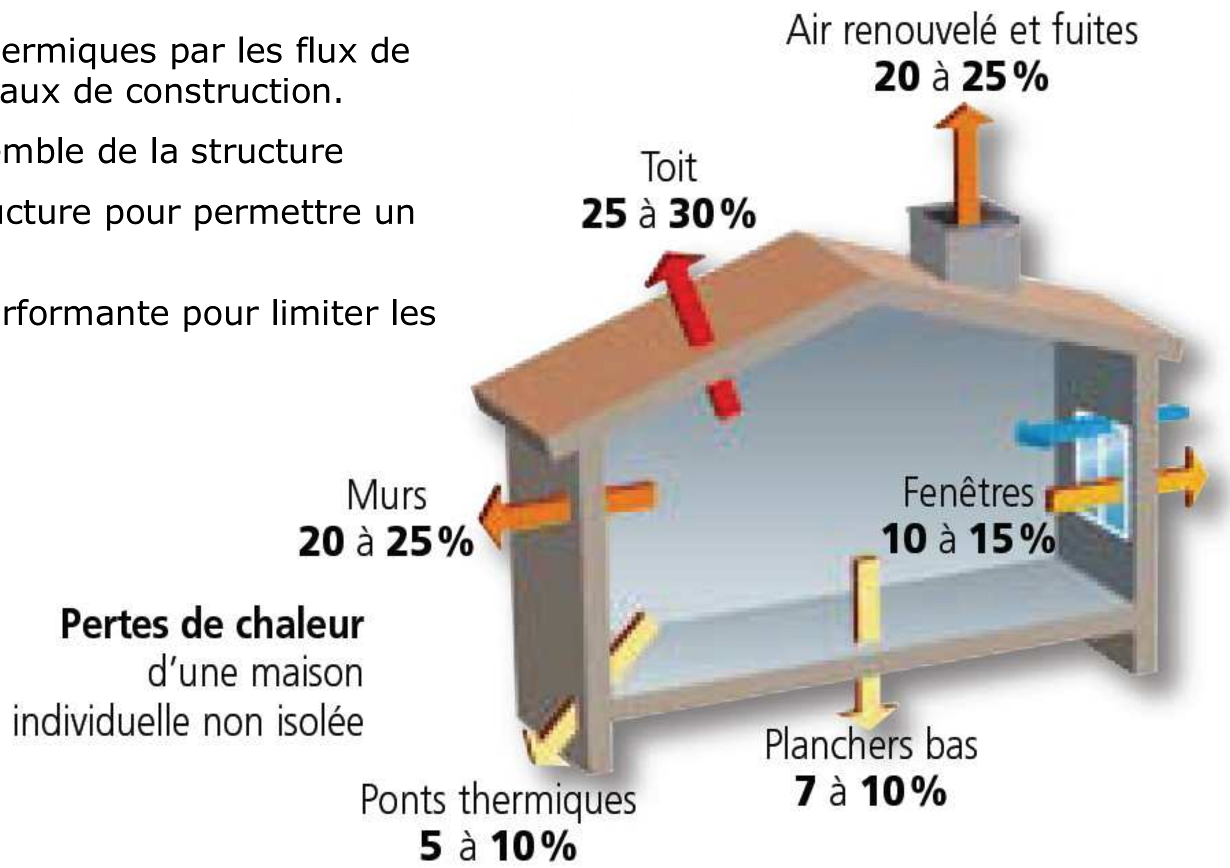
Loi de Wien pour le corps noir



Chapitre 5 Notions d'isolation thermique

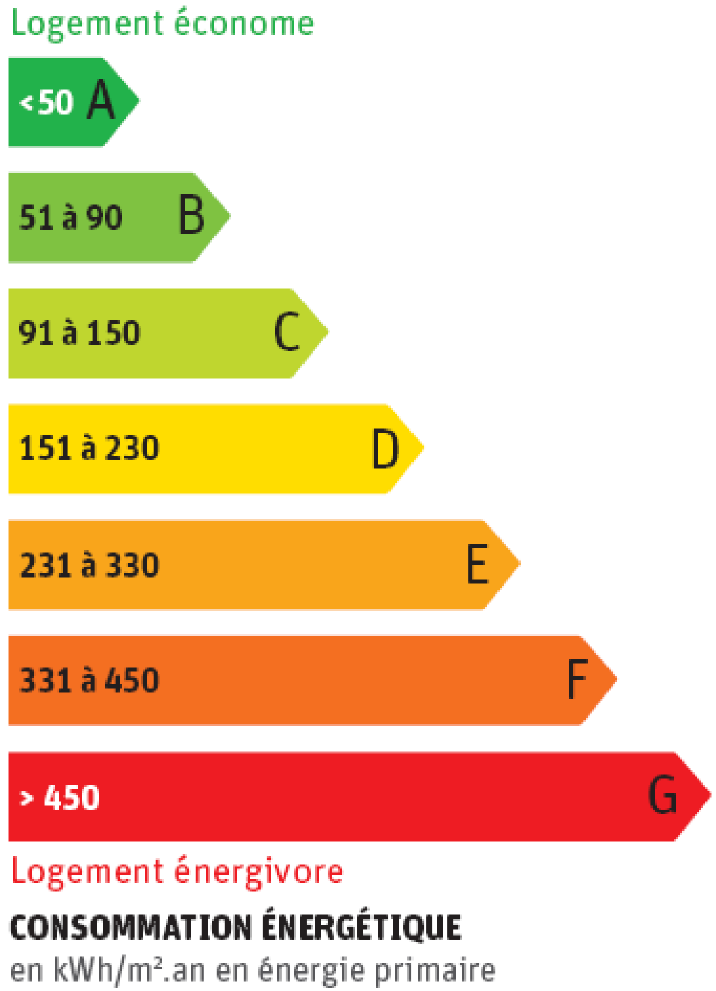
La notion d'isolation thermique regroupe deux principes fondamentaux:

- Diminution des pertes thermiques par les flux de conduction dans les matériaux de construction.
- Bonne respiration d'ensemble de la structure
- Inertie relative de la structure pour permettre un bon déphasage (Hiver/été)
- Installation technique performante pour limiter les ponts thermiques.



I. La réglementation thermique 2005

Une réglementation thermique impose des normes pour l'isolation des bâtiments. Elle conditionne la classification énergétique des bâtiments:



Une brève présentation de cette réglementation est fournie en annexe du cours. (A lire !)

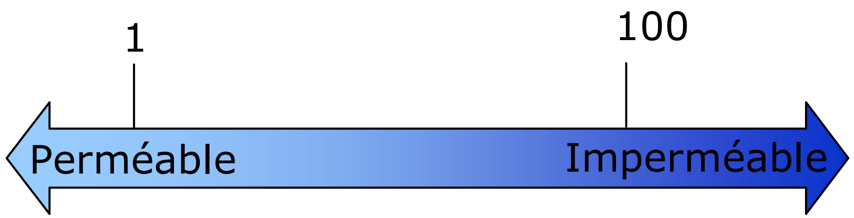
I. Les paramètres importants

λ

La conductivité thermique (Lambda) exprimée en W/m/K: Elle caractérise la capacité des matériaux à transmettre la chaleur.

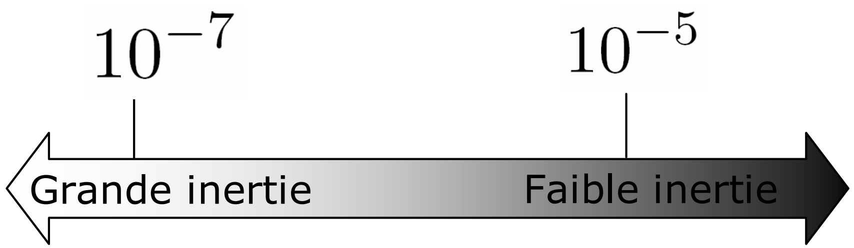
μ

La résistance à la vapeur d'eau (mu) sans unités: Elle caractérise la respiration des matériaux. Il est important d'avoir une bonne respiration pour éviter les problèmes de condensation et de moisissure liés à l'accumulation d'humidité.

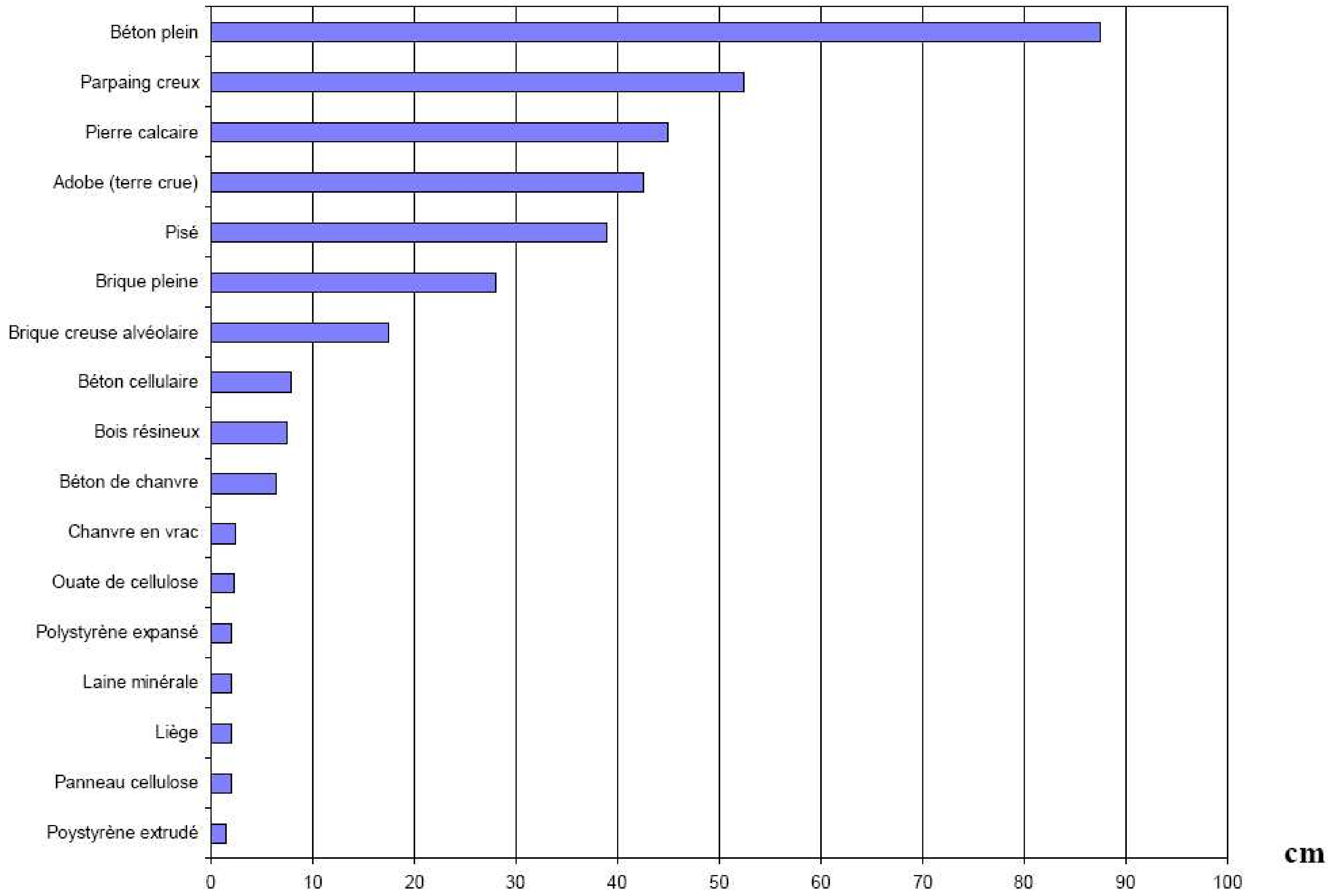


a

La diffusivité thermique (a) en m²/s: Elle caractérise l'inertie thermique des matériaux c'est-à-dire leur capacité à conserver la chaleur et à la restituer en un temps donné.

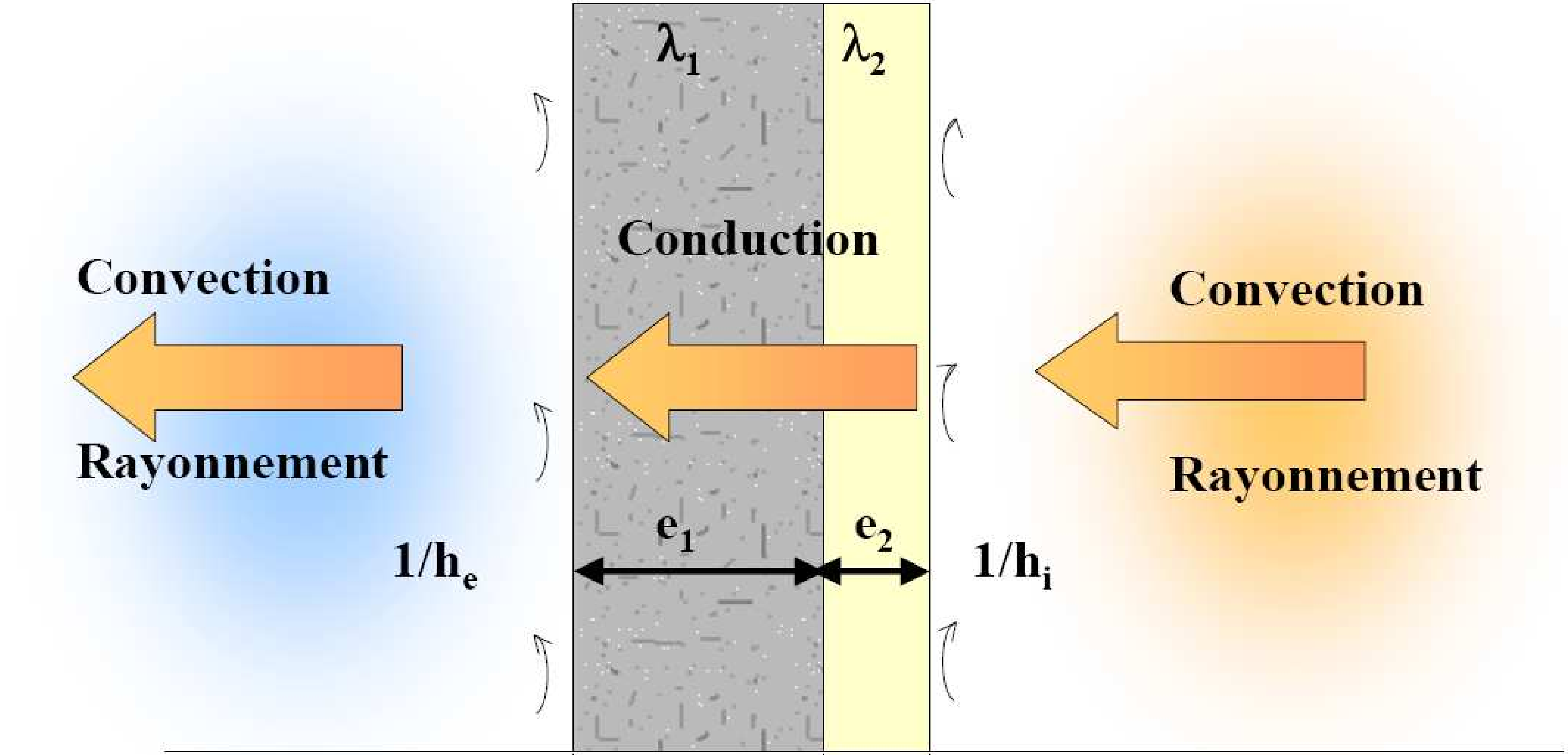


POUR OBTENIR LA MEME ISOLATION QU'UN MUR EN BETON DE PRES DE 90 cm, IL FAUT :



Materiaux	rho (kg/m3)	lambda (W/m,K)	1/lambda	cp (J/kg/K)	a (m2/s)	épaisseur (m) minimale pour un déph de 12 h	mu	EG (kWh/m3)	CO2 (kg Co2/m3)	euros par kilo	euros par m3
Type murs porteurs											
Briques pleines (cuites)	1850	1	1	1000	5,40541E-07	0,086	10	1306	280		
Monomur de terre cuite 37cm	740	0,12	8,333333333	1008	1,60875E-07	0,047	13	521	115		
Bois lourd (hêtre, chêne)	800	0,2	5	2700	9,25926E-08	0,036	35	560	-388		
Beton cellulaire 400kg/m3	400	0,1	10	864	2,89352E-07	0,063	3	500	175		
Bloc béton (Parpaing de ciment)	1185	0,952	1,050420168	1080	7,43866E-07	0,101	10	219	80		
Pisé (1900 kg / m3)	1900	1,05	0,952380952	1008	5,48246E-07	0,087	10	110	33		
Type intermédiaires											
Fermacell	1125	0,36	2,777777778	1265	2,52964E-07	0,059	11	1669	412		
Plaque plâtre BA13	825	0,25	4	1008	3,00625E-07	0,064	7	1100	200		
Béton terre-paille 600kg/m3	600	0,17	5,882352941	1300	2,17949E-07	0,055	3	19	-133		
Type Isolants											
Laine de roche 160kg/m3	163	0,047	21,27659574	1030	2,79945E-07	0,062	1	1463	358		
Laine de verre 100kg/m3	100	0,039	25,64102564	1030	3,78641E-07	0,072	1	1200	150	0,87	87
Polystyrène expansé	18	0,039	25,64102564	1450	1,49425E-06	0,143	60	486	67		
Laine de mouton et autres fibres animales	35	0,06	16,66666667	1600	1,07143E-06	0,121	1	252	54		
Liège expansé conforme norme NF EN 13170	125	0,049	20,40816327	1560	2,51282E-07	0,059	1	85	-229		
Ouate de cellulose soufflée	23	0,042	23,80952381	1900	9,61098E-07	0,115	1	50	9		
Paille (bottes à plat)	83	0,08	12,5	1332	7,23615E-07	0,1	1	1	-165		
Lame d'air immobile	1	0,0262	38,16793893	1000	0,0000262	0,6	1	0	0		
Type Freine vapeur											
Pare-Vapeur (Sd=1500m)	130	2,3	0,434782609	2300	7,69231E-06	0,325	1500000	0	0		
Pare-pluie (Sd=0,2)	130	2,3	0,434782609	2300	7,69231E-06	0,325	200	0	0		
Type Métaux											
Cuivre	8920	390	0,002564103	385	0,000113564	1,25	inf	140000	grand	5,2	46384
Aluminium	2700	237	0,004219409	897	9,78571E-05	1,16	inf	190000	grand	1	2700
Acier doux	7850	46	0,02173913	550	1,06543E-05	0,383	inf	60000	grand	0,2	1570
Plomb	11350	35	0,028571429	129	2,39047E-05	0,573	inf	80000	grand	0,6	6810

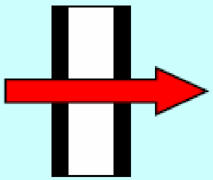
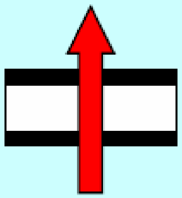
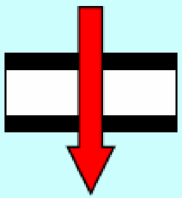
Résistance thermique d 'une paroi



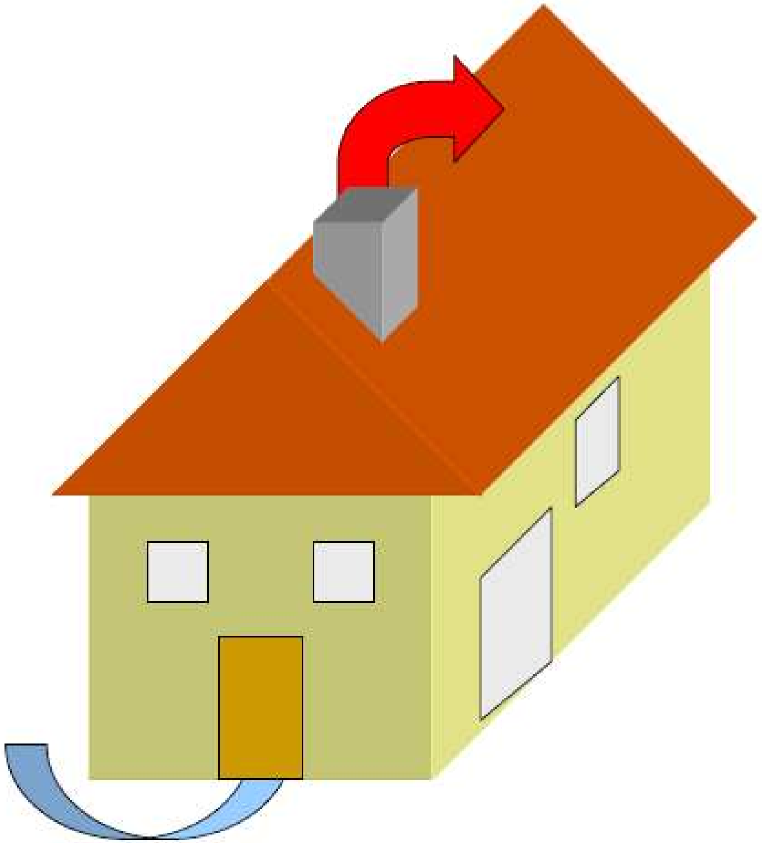
$$R = \frac{1}{h_e} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_i}$$

Remarque: Si la surface reste la même partout, on peut ne pas la faire intervenir dans l'expression de la résistance thermique à condition de bien tenir compte des unités !!!!

On peut caractériser des ordres de grandeurs pour les échanges extérieurs:

Résistance thermique d 'échanges superficiels ($m^2.K/W$)		Paroi en contact avec : - l 'extérieur - un passage ouvert - un local ouvert			Paroi en contact avec : - un autre local chauffé - un comble - un vide sanitaire		
		$1/h_i$	$1/h_e$	$1/h_i+1/h_e$	$1/h_i$	$1/h_e$	$1/h_i+1/h_e$
	Paroi verticale ou faisant un angle avec l 'horizontale supérieur à 60°	0,11	0,06	0,17	0,11	0,11	0,22
	Paroi horizontale ou angle inférieur à 60° flux ascendant	0,09	0,05	0,14	0,09	0,09	0,18
	Flux descendant	0,17	0,05	0,22	0,17	0,17	0,34

Pertes par renouvellement d 'air



Dans toute habitation un renouvellement de l 'air est nécessaire.

Ce renouvellement se fait en laissant entrer de l 'air dans les pièces principales et en l 'évacuant par les pièces secondaires, soit de manière naturelle, soit par convection forcée (ventilation mécanique contrôlée).

La masse d 'air qui traverse la maison se réchauffe et emporte une quantité d 'énergie.

Le débit de renouvellement d 'air permet de calculer les déperditions dues à ce renouvellement.

DR = 0,34 x débit total de renouvellement d 'air

W/K

Chaleur volumique de l 'air exprimée en Wh/m^3

m^3/h

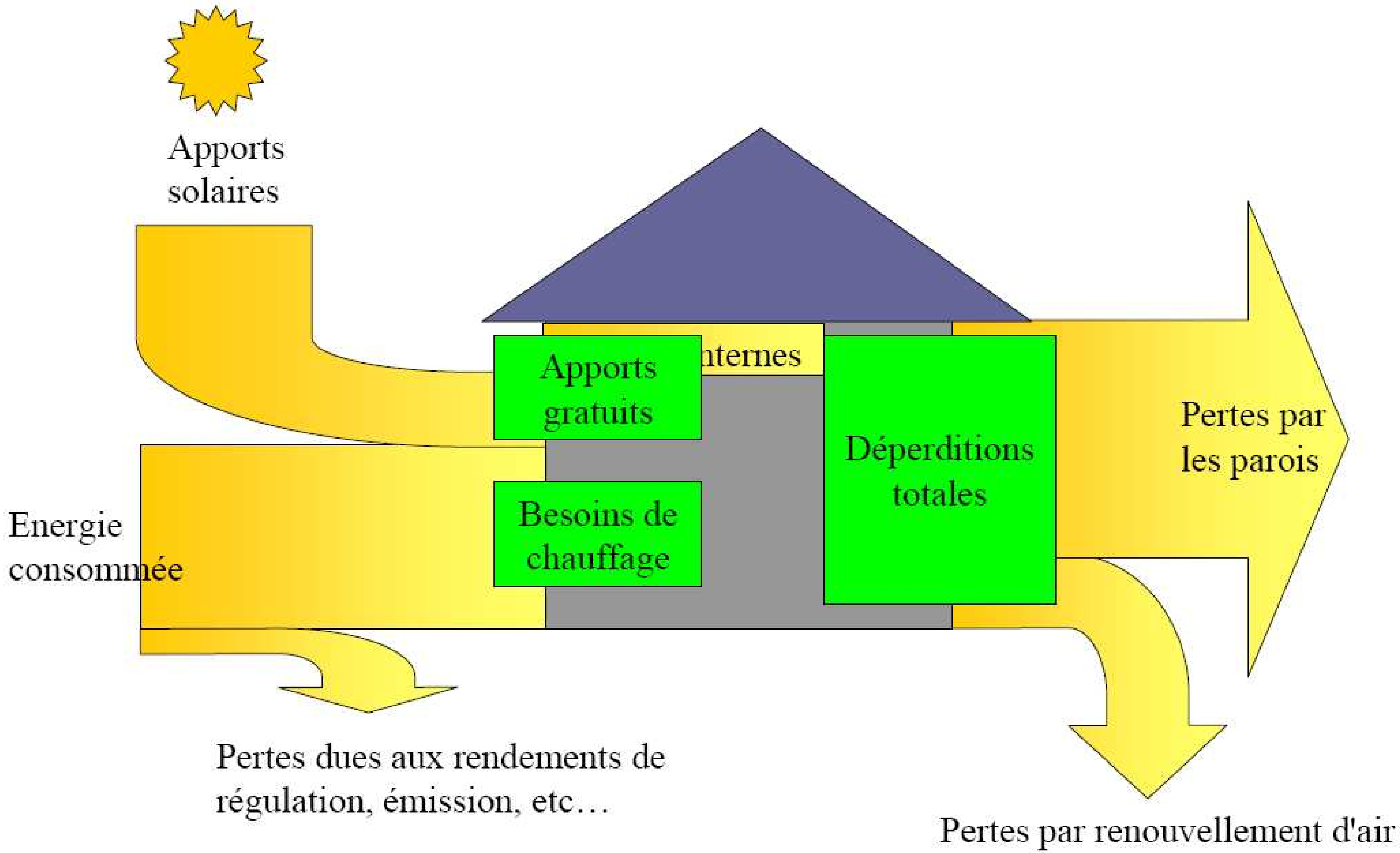
Le confort thermique

La notion de confort thermique est une donnée subjective qui dépend fortement des individus:

Une personne fatiguée ou malade sera plus sensible à une température trop faible. On peut cependant définir des critères qui permettent de fixer les limites du confort. Une température trop élevée, un air trop sec ou des courants d 'air trop importants créent une gêne ressentie par tout le monde. C 'est donc autour des grandeurs telles que la température de l 'air, la température des parois, la température du sol, l'humidité relative et la vitesse de l 'air que le thermicien va définir les limites du confort.

Grandeur	min	max	Commentaires
T air (°C)	18	22	
T paroi (°C)	14	22	Doit être aussi proche que possible de la température de l 'air les parois froides sont source d 'inconfort.
Tsol (°C)	15	28	Ne doit pas dépasser 28°C. La température de surface de la peau est d 'environ 32°C. Dépend de l 'effusivité du sol.
Humidité de l 'air (%)	35	85	
Vitesse de l 'air (m/s)	0	0,3	Dépend de la température de l 'air.

Bilan thermique d'un logement



Besoins de chauffage = Déperditions totales – Apports gratuits

Conclusion

Pour maîtriser l'isolation thermique il faut:

- Connaître les propriétés des matériaux
- Dimensionner le chauffage (Calcul de puissance W)
- Prévoir les consommations annuelles et vérifier l'accord avec la réglementation (Calcul de quantité énergétiques kWh)
- Vérifier le confort thermique (Calcul de températures)

Chapitre 6 Équation de la chaleur

Jusqu’à présent, nous avons considéré l’évolution stationnaire de la chaleur suivant différents modes de propagation.

L’équation de la chaleur est la forme la plus générale régissant l’évolution spatial et temporelle de la chaleur.

Nous allons ici en voir la forme générale dans le cas de la conduction pure.

Ce chapitre est fondamental car il synthétise toutes les notions vues jusqu’à présent !!!

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

I.Forme générale

L'équation de la chaleur vient du bilan de conservation de l'énergie que nous connaissons bien:

$$\text{variation temporelle} = \text{terme de flux} + \text{création intérieure}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint e\rho dv = -\iint \overrightarrow{q}\cdot d\overrightarrow{s} + \iiint r dv$$

La présence d'intégrales signifie que l'on considère le système total: C'est une **forme globale**

Dans la plupart des applications, c'est la forme locale qui est utilisée. IL faut donc établir la forme locale à partir de la forme globale (c'est-à-dire supprimer les intégrales)

I.Forme générale

De la forme globale à la forme locale:

$$\frac{d}{dt}\iiint e\rho dv = \underbrace{-\iint \overrightarrow{q}\cdot d\overrightarrow{s}}_{\text{Intégrale de surface liée aux flux}} + \iiint r dv$$

Théorème de Green-Ostrogradsky:

Soit A un vecteur à dérivées partielles bornées:

$$\boxed{\iint_{\Sigma}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\Sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} div(\overrightarrow{A})d\mathcal{V}}$$

I.Forme générale

$$\frac{d}{dt}\iiint e\rho dv = -\iint \overrightarrow{q}\cdot d\overrightarrow{s} + \iiint r dv$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho e + div(\overrightarrow{q}) - r\right] d\mathcal{V} = 0$$

État local associé:

$$\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho e}_{\text{Variation temporelle totale}} + \underbrace{div(\overrightarrow{q})}_{\text{Variation locale des flux}} - \underbrace{r}_{\text{Production (sources) locale}}\right] = 0$$

R: Cette équation regroupe tous les principes de la mécanique des milieux continus. !!!

Écriture dans le cas de la conduction pure dans un milieu homogène incompressible:

$$\left.\begin{aligned} \partial e &= c_p \partial T \\ \rho &= Cste \\ \overrightarrow{q} &= -\lambda \overrightarrow{grad}(T) \\ div(\overrightarrow{grad}(T)) &= \Delta T \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Forme classique de l'équation de la chaleur en 3D

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

Forme développée:

$$\mathbf{a} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \mathcal{R}$$

II. Résolution

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

1. Éléments pour la résolution

Pour les Matheux..

L'équation de la chaleur sous sa forme générale est une équation aux dérivées partielles (EDP) **linéaire** du **2eme ordre** à coefficient constant de type **parabolique**.

Conditions aux limites

C'est à travers ces conditions que l'on prend en compte la géométrie du système étudié ainsi que sa configuration (Température des murs, flux incidents…). Elles servent à déterminer les constantes intervenant dans les solutions générales.
Elles peuvent être de différents natures:

- ✓ Température pariétale imposée:

$$T = T_{paroi}$$

- ✓ Flux pariétal imposé:

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{paroi} = \phi_{paroi}$$

- ✓ Transfert linéaire à la surface :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{paroi} = h(T_{paroi} - T_{ext})$$

Conditions initiales

Dans le cas de résolutions instationnaires (voir plus loin) il faut préciser l'état initial du système, c'est-à-dire la valeur des variables au temps t=0 en tout point de l'espace. L'évolution temporelle du système dépend de cet état initial.

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0$$

II. Résolution

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

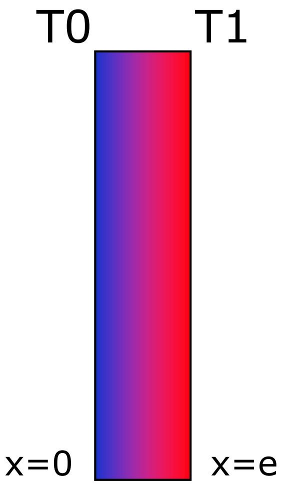
2. Résolution stationnaire en 1D

Hypothèse stationnaire: $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

L'équation de la chaleur devient: $\lambda \Delta T + r = 0$

Soit en 1D: $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r = 0$

Exemple du murs



En l'absence de production l'équation devient simplement: $\dfrac{d^2 T}{dx^2} = 0$

Solutions de la forme $T = ax + b$

Conditions aux limites: T=T0 en x=0
T=T1 en x=e

$$T = T_0 + \frac{x}{e}(T_1 - T_0)$$

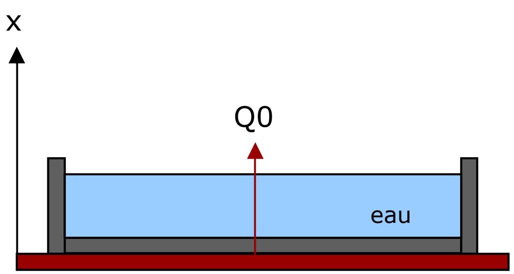
On retrouve l'expression du flux de chaleur grâce à la loi de Fourier. On retombe sur l'expression vue dans le chapitre précédent !

II. Résolution

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

Exemple de la casserole :

Une casserole en alu d'épaisseur e=0.5cm et de diamètre D=20cm est posée sur une plaque électrique imposant un flux Q0 de 900W.



En l'absence de production l'équation devient simplement: $$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Solutions de la forme $T = ax + b$

Conditions aux limites:

En x=0 flux imposé
q0 =Q0/S

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0$$

T=Te en x=e

$$T(x) = -\frac{q_0}{\lambda}(x - e) + T_e$$

$$T(0) = \frac{q_0}{\lambda} e + T_e$$

Avec Te=100°C on a T0=100.7°C

II. Résolution

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

3. Résolution instationnaire

On souhaite connaître la forme des solutions de l'équation de la chaleur instationnaire. Ici on se placera dans le cas monodimensionnelle sans production de chaleur. L'équation de la chaleur s'écrit alors:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] \quad \text{avec} \quad \mathbf{a} = \frac{\lambda}{\rho c_p}}$$

On cherche des solutions sous forme de variables séparées:

$$T(x,t) = f(t)g(x)$$

Attention: C'est un certain type de solutions. On peut trouver d'autre formes qui ne sont pas à variables séparées en utilisant par exemple la transformée de Laplace.

Ainsi l'équation de la chaleur devient: $f'(t)g(x) = \mathbf{a} f(t)g''(x)$ soit

$$\underbrace{\frac{f'(t)}{f(t)}}_{\text{Dépend uniquement de } t} = \mathbf{a}\underbrace{\frac{g''(x)}{g(x)}}_{\text{Dépend uniquement de } x}$$

La seule possibilité est donc: $\frac{f'(t)}{f(t)} = \mathbf{a}\frac{g''(x)}{g(x)}$ = K

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r}$$

II. Résolution

3. Résolution instationnaire

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \mathbf{a}K$$

Solutions de la forme: $f(t) = e^{\mathbf{a}Kt}$

Sans source de chaleur et en accord avec le second principe, la température doit décroitre dans le temps, on a donc K<0. On pose alors $K=-k^2$

$$f(t) = e^{-\mathbf{a}k^2 t}$$

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = K$$

Solutions de la forme: $g(x) = Acos(kx) + Bsin(kx)$

Solutions générales de la forme: $T(x,t) = e^{-\mathbf{a}k^2 t}[Acos(kx) + Bsin(kx)]$

A, B et k sont des constantes qu'il faut déterminer à l'aide des conditions aux limites et des conditions initiales.

Principe de superposition: Toute combinaison linéaire de solutions est également une solution de l'équation.

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mathbf{a}k_i^2 t}[A_i cos(k_i x) + B_i sin(k_i x)]$$

II. Résolution

4. Le nombre de Biot

Épaisseur de conduction

Coefficient d'échange

$$Bi = \frac{R_{th}^{cond}}{R_{th}^{conv}} = \frac{eh}{\lambda}$$

Conductivité thermique

Critère de définition des systèmes:

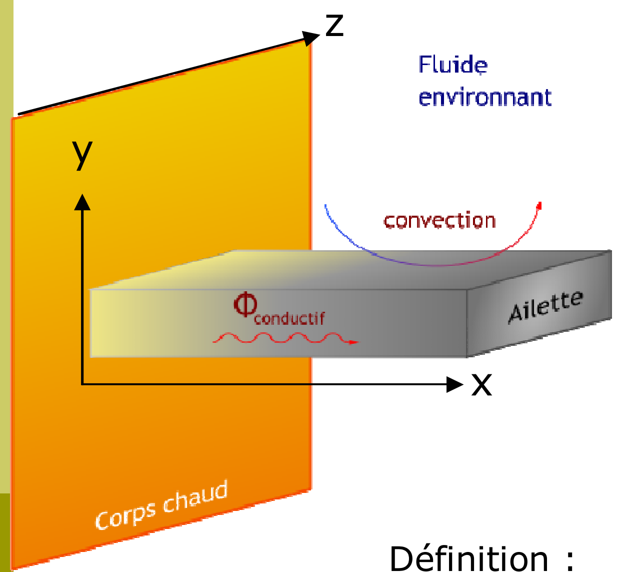
- ✓ Bi <0.1   Système minces
- ✓ Bi >0.1   Système épais

Dans un système mince, (faible nombre de Biot) la conduction est négligeable à l'intérieur du solide, la température est considérée comme uniforme. (Ch Chapitre 3)

Dans un système épais, la conduction n'est plus négligeable, il faut prendre en compte les variations spatiales de température à l'intérieur du corps.

Remarque: En fait dans le chapitre 3, on avait déjà résolu l'équation de la chaleur dans le cas d'un système mince en faisant un bilan global sur le système !

III. Le cas de l'ailette



Définition :

Une ailette est un dispositif permettant d'augmenter la surface d'échange et donc de faciliter le transfert thermique.

Dans certains cas, la résolution de l'équation de la chaleur ne permet pas d'obtenir directement les solutions du problème.

C'est le cas pour l'ailette. L'équation monodimensionnelle de la chaleur ne prend pas en compte les échanges convectifs avec l'extérieur sur les parois latérales.

Il faudrait alors prendre en compte les dimensions x et y dans l'équation ce qui complexifie grandement les choses.

Il faut alors reprendre le bilan globale des flux de chaleur:

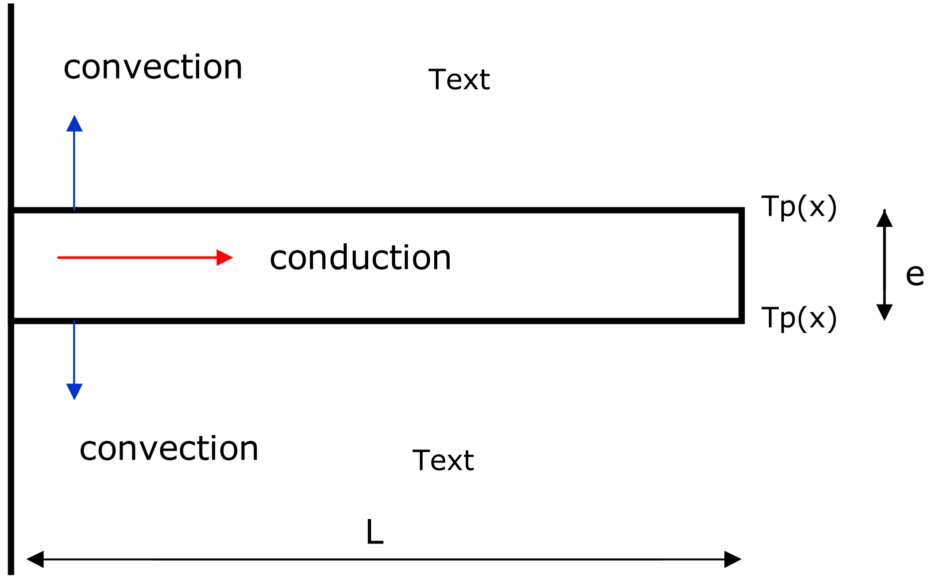
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_V \rho c_p T dV}_{\text{Variation temporelle totale}} = \underbrace{-\iint_{Sy} q_{conv} dS}_{\text{Flux global de convection}} - \underbrace{\iiint_V div(q_{cond}) dV}_{\text{Flux global de conduction}}$$

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = -hS_{lat}(T_p(x) - T_{ext}) - V\frac{\partial q_x}{\partial x}$$

III. Le cas de l'ailette

Considérons une ailette infinie dans la direction z échangeant de la chaleur par convection uniquement suivant les deux surfaces latérales Slat=2Sy

$$S_y = \frac{V}{e}$$



Le bilan global de l'ailette s'écrit alors:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} - \frac{2h}{e}(T_p(x) - T_{ext})$$

L'équation instationnaire de l'ailette devient:

$$\boxed{\frac{dT_p(x)}{dt} = \mathbf{a}\frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} - \frac{2\mathbf{a}Bi}{e^2}(T_p(x) - T_{ext})}$$

III. Le cas de l'ailette

Ici on se place dans le cas des régimes stationnaires. L'équation fondamentale de l'ailette s'écrit alors:

$$\boxed{\frac{d^2T_p(x)}{dx^2} - \frac{2Bi}{e^2}(T_p(x) - T_{ext}) = 0}$$

C'est une équation différentielle du second ordre classique qui ne dépend que de x. Souvent on définit les grandeurs suivantes:

Température relative: $\theta = T_p - T_{ext}$

Longueur efficace de l'ailette: $L_c = \frac{e}{\sqrt{2Bi}}$

L'équation devient:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{L_c^2}\theta = 0}$$

Les solutions sont de la forme:

$$\theta(x) = Ach\left(\frac{x}{L_c}\right) + Bsh\left(\frac{x}{L_c}\right)$$

ou

$$\theta(x) = A'exp\left(\frac{x}{L_c}\right) + B'exp\left(\frac{x}{L_c}\right)$$

La longueur efficace de l'ailette indique la longueur a partir de laquelle elle est utile.

Si L<<Lc l'ailette n'a pas d'effet il faut la rallonger.

Si L>>Lc l'ailette est trop longue, l'excédant peut être coupé.

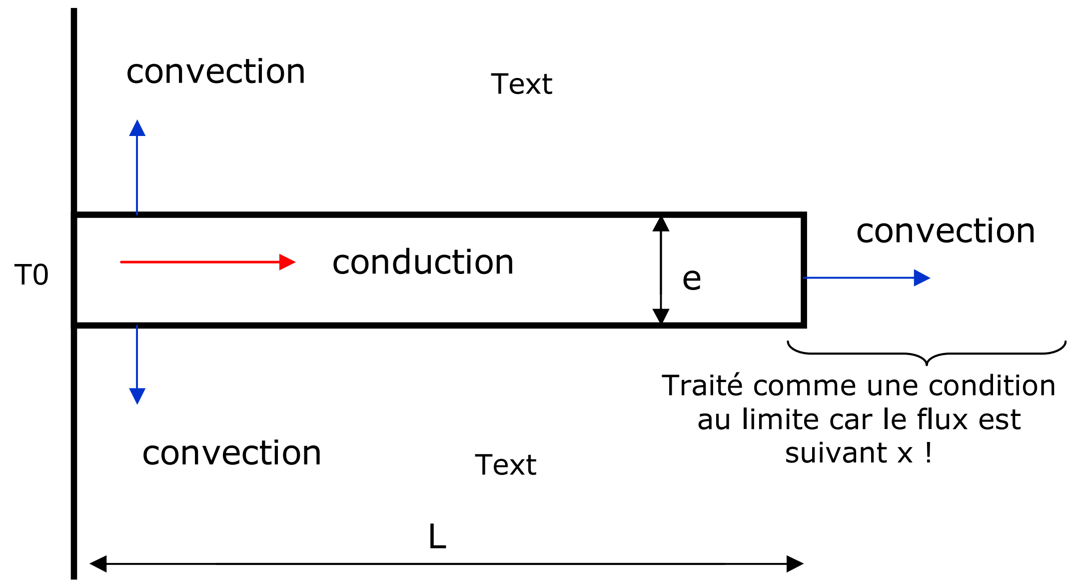
III. Le cas de l'ailette

$$\theta(x) = Ach\left(\frac{x}{L_c}\right) + Bsh\left(\frac{x}{L_c}\right)$$

A et B doivent être déterminées par les conditions aux limites.

En x=0 T=T0

En x=L flux convectif imposé



On trouve:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{ch\left(\frac{L-x}{L_c}\right) + \frac{2e}{L_c} sh\left(\frac{L-x}{L_c}\right)}{ch\left(\frac{L}{L_c}\right) + \frac{2e}{L_c} sh\left(\frac{L}{L_c}\right)}$$

Chapitre 7

Résolution numérique de l'équation de la chaleur

On se propose dans ce chapitre de résoudre numériquement l'équation de la chaleur en 1D à l'aide des différences finies.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]$$

Nous allons voir comment passer de l'espace continue (réalité) à l'espace discret (numérique). Nous verrons également comment prendre en compte les conditions aux limites ainsi que les conditions de stabilité du schéma utilisé.

I. Matlab

Pour la résolution, nous allons utiliser le logiciel Matlab qui est basé sur le calcul matriciel. Dans Matlab tout n'est que Matrices !! (D'où le nom….)

Matlab est un logiciel de calcul numérique par opposition à Maple ou Mathématica qui font du calcul formel. Il faut ainsi définir toutes variables utilisées.

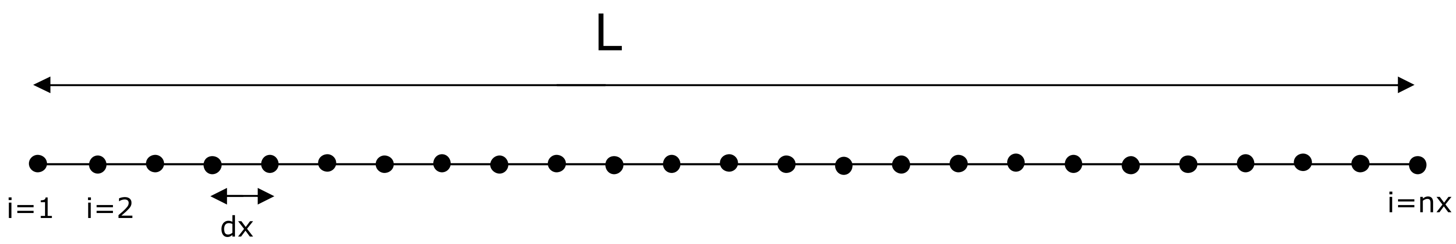
Avec Matlab, on peut soit utiliser des lignes de commandes directement, soit écrire un programme dans un fichier .m que l'on exécute par la suite.

Ainsi, pour la résolution de l'équation de la chaleur, nous allons créer un fichier Chaleur1D.m dans lequel nous écrirons toutes les commandes à réaliser pour la résolution.

II. Résolution numérique

Le principe d'une résolution numérique est de calculer à chaque instant la valeur de la température sur les points de maillage.

Un maillage est définie par nx points le long de la longueur L du domaine de calcul:



Ainsi la taille de maille du domaine est définie par: dx=L/(nx-1)

On repère souvent les points de maillage par l'indice i qui varie donc de 1 à nx

II. Résolution numérique

Une fois le domaine défini, il faut écrire l'algorithme permettant la résolution de l'équation.

La principale difficulté réside dans le calcul des dérivées. Par définition de la dérivée, on peut écrire:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Soit, dans le domaine discret: $\dfrac{dT_i}{dx} = \dfrac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$ et $\dfrac{dT_{i+1}}{dx} = \dfrac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$

Ce qui donne pour le Laplacien:

$$\frac{d^2T_i}{dx^2} = \frac{\dfrac{dT_{i+1}}{dx} - \dfrac{dT_i}{dx}}{\Delta x}$$ soit $$\frac{d^2T_i}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

II. Résolution numérique

Pour les dérivées temporelles on procède de la même manière en discrétisant le temps de façon régulière en nt itérations (t=1..nt)

L'équation de la chaleur s'écrit alors:

Domaine Continue	Domaine Discret
$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]$	$\frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta t} = \mathbf{a} \frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{\Delta x^2}$

L'algorithme général s'écrit alors:

$$\boxed{T_i^{t+1} = T_i^t + \mathcal{M}(T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{M} = \mathbf{a} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}}$$

II. Résolution numérique

Condition de stabilité:

En pratique, on ne peut pas choisir n'importe quelle valeur pour le pas de temps . Si on choisit une valeur trop grande, le calcul devient instable et explose…

En écrivant l'algorithme sous la forme:

$$T_i^{t+1} = (1 - 2\mathcal{M})T_i^t + \mathcal{M}(T_{i+1}^t + T_{i-1}^t)$$

On remarque que la quantité $(1 - 2\mathcal{M})$ doit être positive. Ce qui implique une limite supérieure pour le pas de temps:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mathbf{a}}}$$

Dans le cas générale, on montre que la condition de stabilité s'écrit:

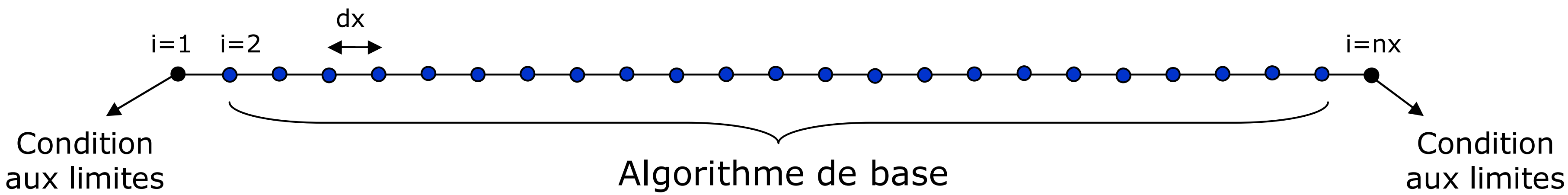
$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mathbf{a}q}}$$

Ou q désigne le nombre de variables géométriques (ici 1D donc q=1)

II. Résolution numérique

Conditions aux limites:

On voit que pour i=1 et i=nx, les termes T_{i-1} et T_{i+1} ne sont pas connus. En pratique on fait tourner l'algorithme entre i=2 et i=nx-1 et on détermine les valeurs de la température aux points i=1 et i=nx grâce aux conditions aux limites.



CL de type Température imposée:

Il suffit de définir T_1 et T_{nx} avant la boucle temporelle:

- $T_1=T(x=0)$

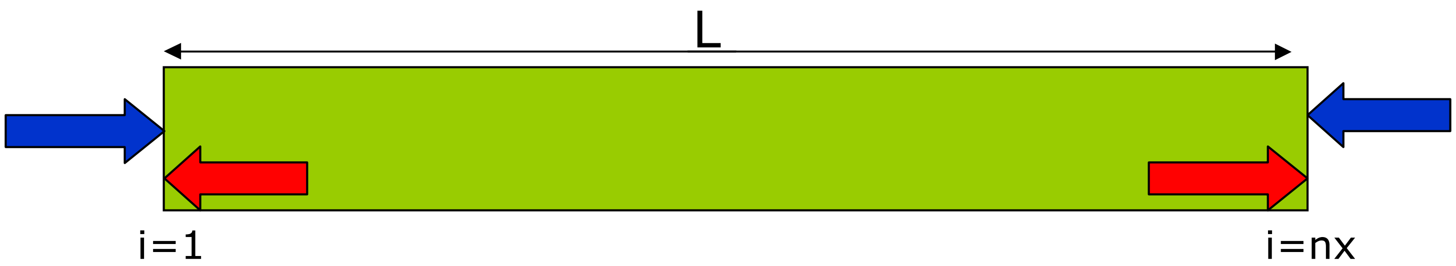
- $T_{nx}=T(x=L)$

II. Résolution numérique

Conditions aux limites:

CL de type flux imposé:

Il faut faire un bilan thermique global au point considéré:



$$\rho c_p L \frac{dT}{dt}\Big|_{i=1} = -\varphi_{cond} + \varphi$$

$$\rho c_p L \frac{dT}{dt}\Big|_{i=nx} = \varphi_{cond} + \varphi$$

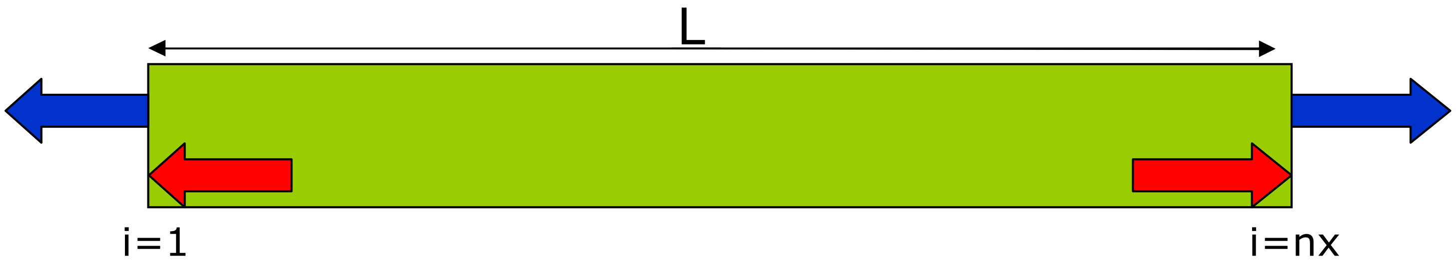
$$T_1^{t+1} - T_1^t = \frac{\mathbf{a}\Delta t}{L\Delta x}(T_2^t - T_1^t) + \frac{\mathbf{a}\Delta t}{\lambda L}\varphi$$

$$T_{nx}^{t+1} - T_{nx}^t = -\frac{\mathbf{a}\Delta t}{L\Delta x}(T_{nx}^t - T_{nx-1}^t) + \frac{\mathbf{a}\Delta t}{\lambda L}\varphi$$

II. Résolution numérique

Conditions aux limites:

CL de type transfert linéaire avec l'extérieur:



$$\rho c_p L \frac{dT}{dt}\Big|_{i=1} = -\varphi_{con} - \varphi_{conv}$$

$$T_1^{t+1} - T_1^t = \frac{\mathbf{a}\Delta t}{L\Delta x}(T_2^t - T_1^t) - \frac{\mathbf{a}Bi\Delta t}{L^2}(T_1^t - T_{ext})$$

$$\rho c_p L \frac{dT}{dt}\Big|_{i=nx} = \varphi_{cond} - \varphi_{conv}$$

$$T_{nx}^{t+1} - T_{nx}^t = -\frac{\mathbf{a}\Delta t}{L\Delta x}(T_{nx}^t - T_{nx-1}^t) - \frac{\mathbf{a}Bi\Delta t}{L^2}(T_{nx-1}^t - T_{ext})$$

II. Résolution numérique

Conditions aux limites:

CL de type transfert linéaire avec l'extérieur:

En présence de conditions aux limites de type transfert linéaire, la nouvelle condition de stabilité en 1D s'écrit:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mathbf{a}} N_{Bi}}$$

avec

$$N_{Bi} = \frac{1}{1 + \frac{Bi}{nx - 1}}$$

III. Algorithme générique

- Définitions du domaine et des paramètres (nx,dx,dt,nt,a,L…)
- Initialisation du domaine: T(x,0)=T0
- CL de type Dirichlet: T(x=0,t)=T1

  T(x=L,t)=T2
- Boucle temporelle:

  for t=1:nt

  On copie les anciennes valeurs de T: Told=T cad Told=T(t-1)

  CL de type Neumann (flux ou transfert)

  - en i=1 …

  - en i=nx …

  Boucle sur x (for i=2:nx-1)

  Algo général sur les points intérieurs

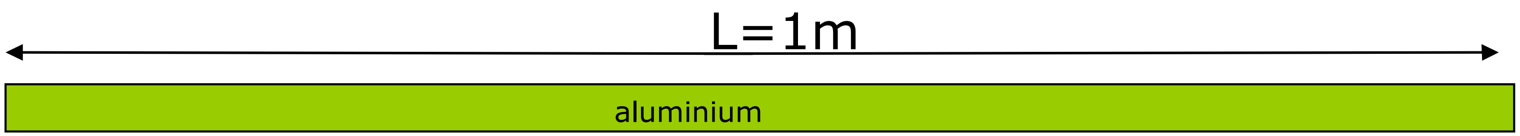
  Fin Boucle x

  Fin boucle temps

IV. Application: « à la maison »

1ere Partie :

Avec Matlab, écrire un programme Chaleur1D.m permettant de résoudre numériquement le problème suivant:



x=0

T0=400 K

x=L

T1=500 K

T2=300 K

$a_{alu}=0.86\ 10^{-4}$ m²/s

On effectuera la simulation sur un intervalle de temps de 3H.

Questions:

Cf DM_therm_num.pdf

Formulaire 2eme Partie

Les formules importantes de cette seconde partie:

	Flux	Résistance thermique		
Conduction:	$\vec{q}_{cond} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$ $\vec{\Phi} = -\lambda S \overrightarrow{grad} T$	$R_{th} = \dfrac{e}{S\lambda}$ Plan	$R_{th} = \dfrac{ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]}{2\pi\lambda L}$ cylindre	$R_{th} = \dfrac{\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}{4\pi\lambda}$ Sphère
Convection:	$\vec{q}_{conv} = h(T_w - T_e)\vec{n}$ $\Phi = hS(T_w - T_e)$	$R_{th}^{conv} = \dfrac{1}{hS}$		
Rayonnement:	$\vec{q}_{ray} = \epsilon\sigma(T_s^4 - T_e^4)\vec{n}$	Coefficient d'échange de rayonnement dans le cas de faibles écarts de température: $h_r = 4\varepsilon\sigma T_e^3$	$R_{th}^{ray} = \dfrac{1}{h_r S}$	

L'équation de la chaleur:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r$$

Savoir résoudre en stationnaire !!

Forme développée:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \mathcal{R}$$

Équation de l'ailette:

$$\frac{dT_p(x)}{dt} = \mathbf{a}\frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} - \frac{2\mathbf{a}Bi}{e^2}(T_p(x) - T_{ext})$$

Nombre de Biot:

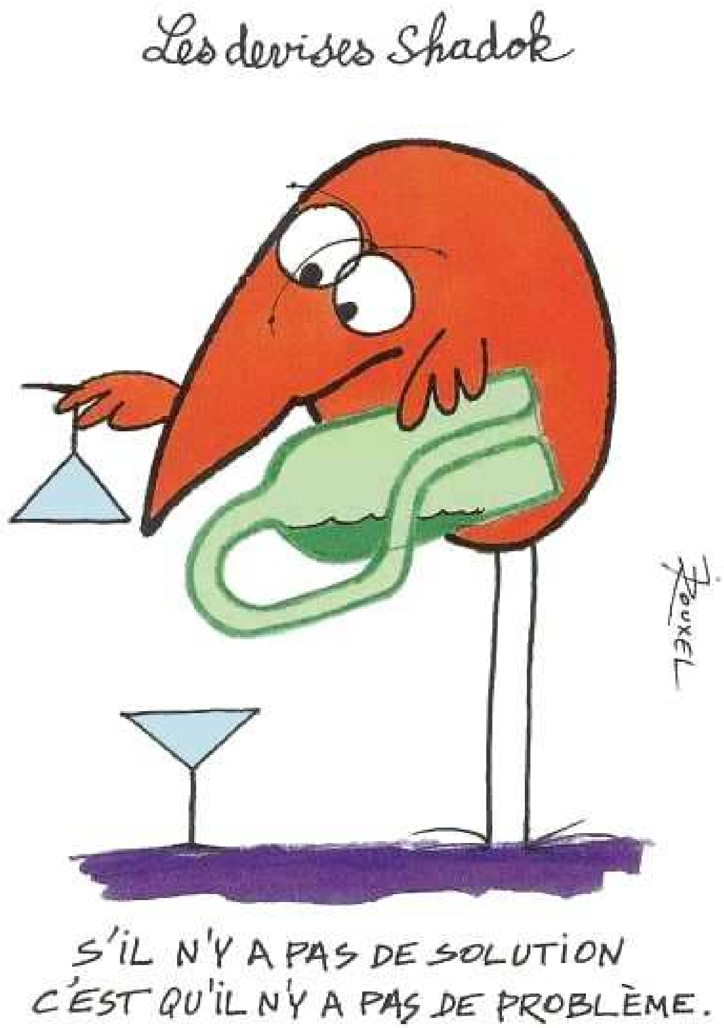
$$Bi = \frac{R_{th}^{cond}}{R_{th}^{conv}} = \frac{eh}{\lambda}$$

Épaisseur de conduction

Coefficient d'échange

Conductivité thermique

Fin du cours


Les devises Shadok
ROUXEL
S'IL N'Y A PAS DE SOLUTION
C'EST QU'IL N'Y A PAS DE PROBLÈME.