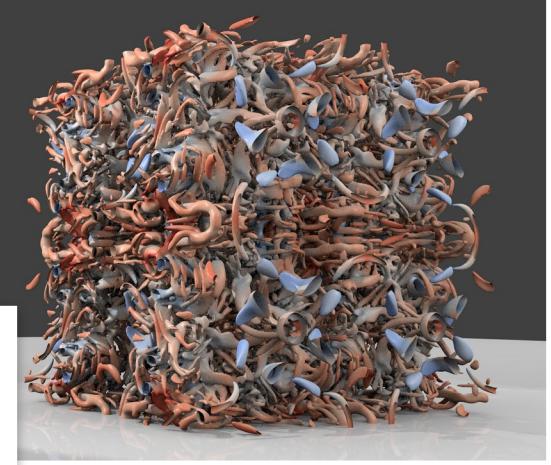
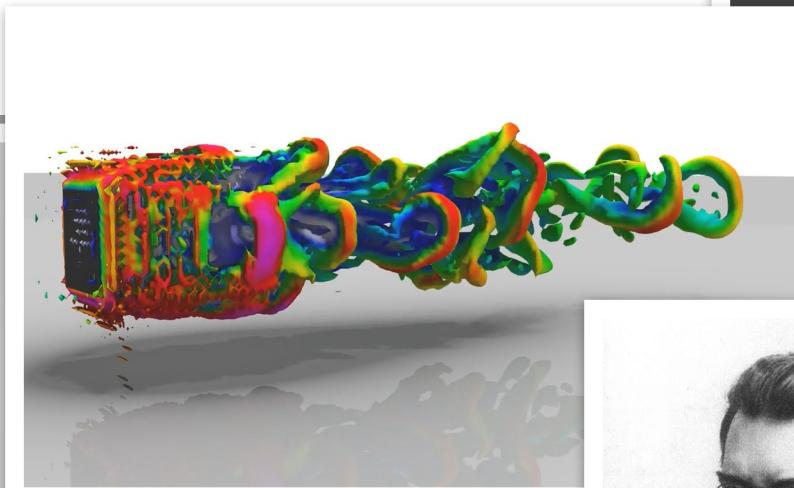
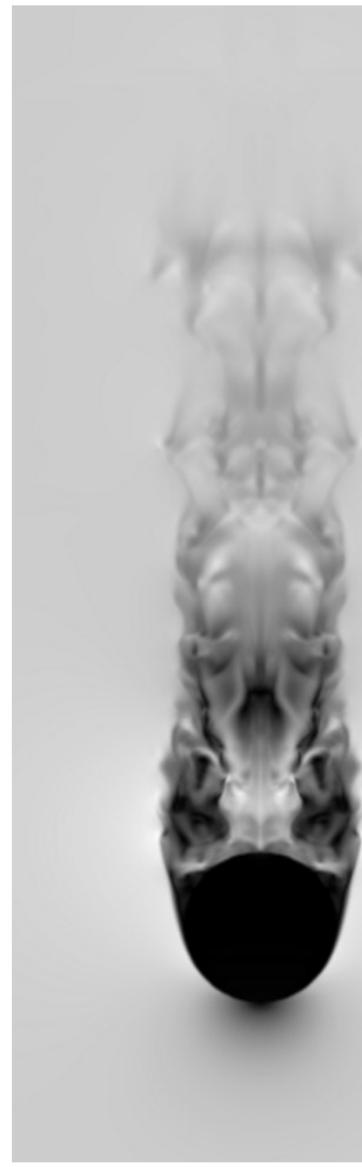
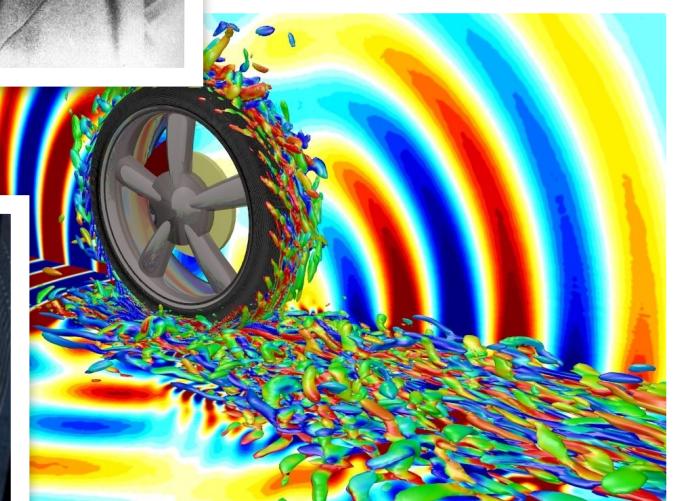
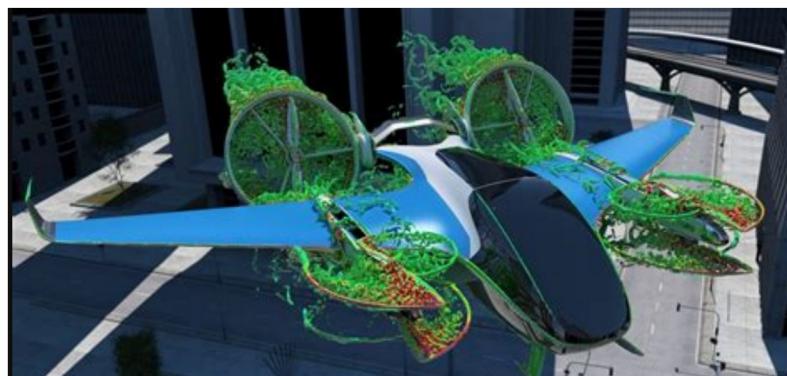
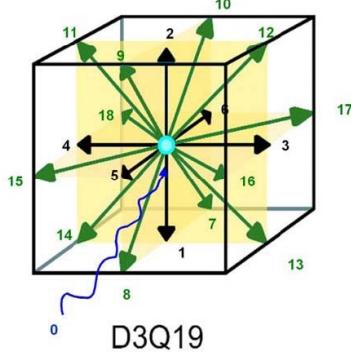
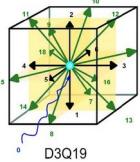


# Introduction aux Méthodes LBM



Simon Marié  
[\(simon.marie@cnam.fr\)](mailto:simon.marie@cnam.fr)





# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discrétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermite

Les quadratures de Gauss-Hermite

Obtention des réseaux standards

Discrétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme Stream & Collide

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

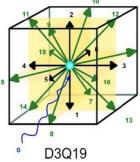
Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]



# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discrétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermite

Les quadratures de Gauss-Hermite

Obtention des réseaux standards

Discrétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme *Stream & Collide*

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

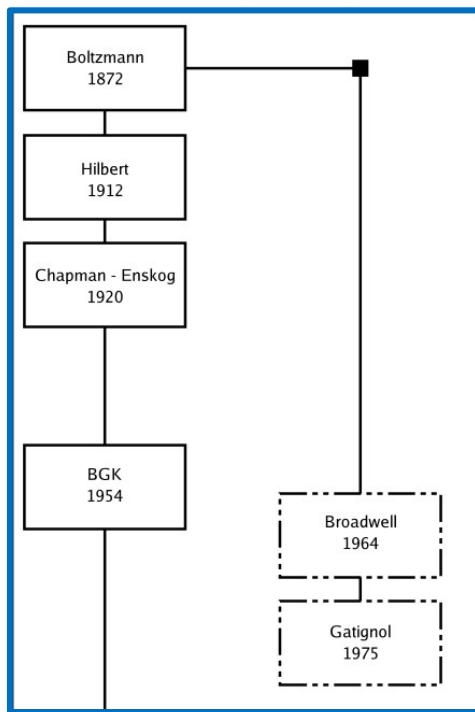
TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]

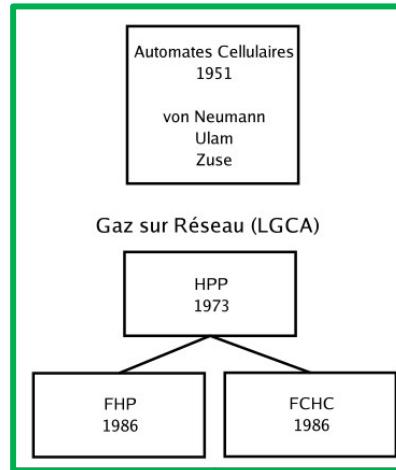
# Evolution de l'idée de calcul sur réseau

## Aspects historiques

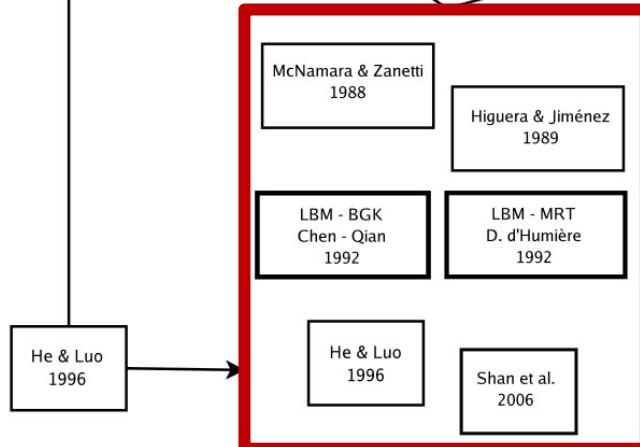
### Théorie cinétique des gaz



### Automates cellulaires



### Boltzmann sur Réseau



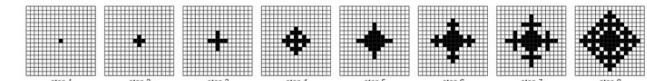
# Evolution de l'idée de calcul sur réseau

## Les automates Cellulaires

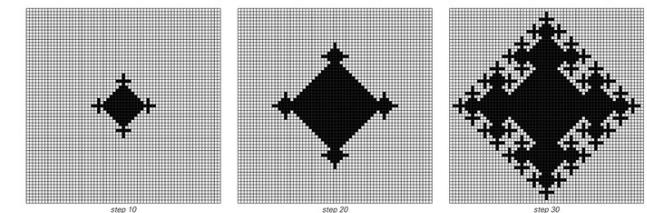
**Principe** d'un automate Cellulaire:

"*Evolution d'un état local en fonction de l'état de son voisinage.*"

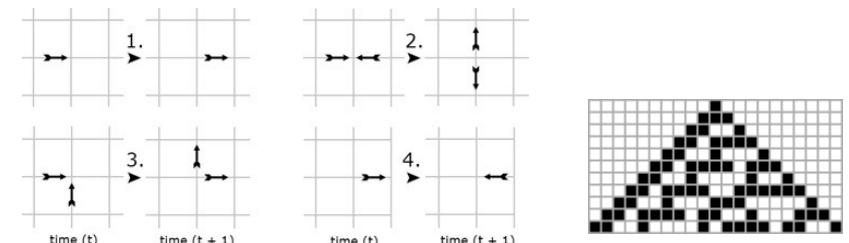
**1951:** Concept de J.v.Neumann



**1969:** Zuse: Les lois physique sont discrètes ?



**1970:** Jeu de la Vie (ConWay)



**1973:** Modèle HPP pour simuler le comportement d'un fluide.

**1983:** Wolfram: Analyse systématique des AC



Von-Neumann



S.Ulam



K.Zuse



J.Conway



S.Wolfram



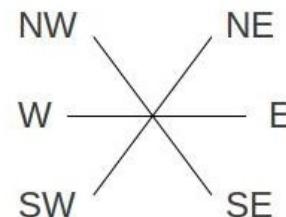
# Evolution de l'idée de calcul sur réseau

## *Les gaz sur réseau*

**Principe** des gaz sur réseau (LGCA):

"Mise à jour algorithmique d'une variable entière pour décrire la dynamique d'un gaz."

**1986:** Modèle FHP



**1987:** Modèle FCHC



*U.Frisch*



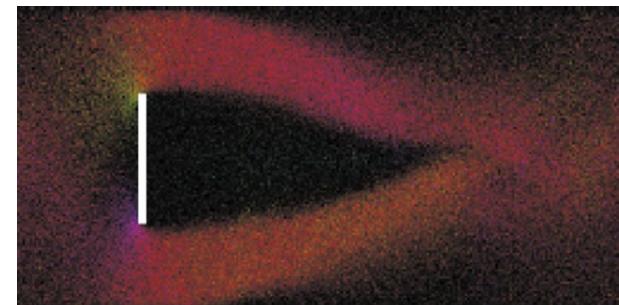
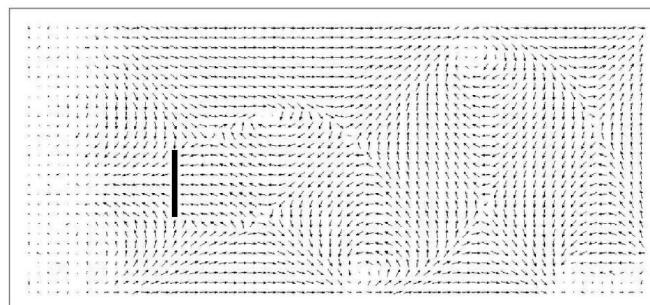
*B.Hasslacher*



*Y.Pomeau*

**1988:** Lien avec l'équation de Boltzmann (**McNamara et Zanetti**)

**1989:** Passage à des variables réelles.





# Evolution de l'idée de calcul sur réseau

## **Idée générale:**

Les lois physiques sont suffisamment locales pour être correctement décrites sur un réseau.

Description mésoscopique engendre des effets à grande échelle.

Lien avec la physique statistique

## **Objectifs du cours:**

- o Comprendre les liens entre la LBM et l'équation de Boltzmann
  - o Comprendre les spécificités de l'algorithme LBM
  - o Connaître les forces et les faiblesses de la méthode
  - o Programmer et Appliquer la méthode sur des cas simples en lien avec la mécanique des fluides.
- 

# Travaux pratiques:

Les **Travaux Pratiques** sont sous forme de Notebook Jupyter. Les fichiers notebook sont à télécharger sur le moodle du cours. (fichier .ipynb)

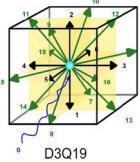
Le principal avantage des notebooks est qu'ils peuvent contenir plusieurs types de contenu comme du python, du latex, du html.

Les comptes-rendus de TP peuvent donc être rédigés sous forme de notebook.

The screenshot shows a Jupyter Notebook interface with the following content:

- ENSTA IP PARIS** logo at the top left.
- DynF Fluid Dynamics Lab** logo at the top right.
- Introduction à la méthode de Boltzmann sur Réseau --** title at the top center.
- TP n°1** section title in red.
- Etude d'un pulse de Pression** subtitle.
- [simon.marie@lecnam.net](mailto:simon.marie@lecnam.net)** email address.
- Préambule** section title in red.
- Text: "Le TP doit être rendu sous la forme d'un Notebook jupyter en respectant la nomenclature suivante:  
**TP1\_NOM1\_NOM2.ipynb**".
- Text: "Tous les résultats, discussions, analyses, doivent donc être inclus dans le fichier."
- Text: "Vous pouvez vous familiariser avec les notions de Python utiles pour ce TP dans ce [Notebook](#)".
- Chapitre du TP** section title in red.
- Étude d'un pulse de Pression** subtitle.





# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discrétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermite

Les quadratures de Gauss-Hermite

Obtention des réseaux standards

Discrétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme *Stream & Collide*

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

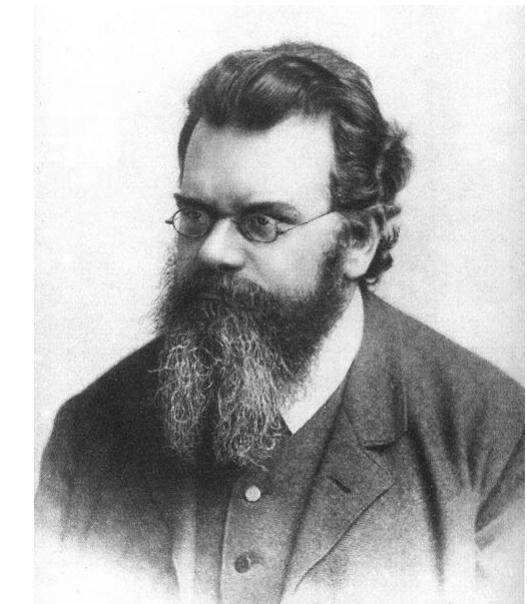
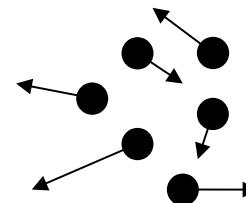
TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]

# L'équation de Boltzmann

Approche statistique d'un écoulement:

Fluide = ensemble de particules se mouvant à des vitesses **c** différentes



**Ludwig Boltzmann**  
1844-1906

Formalisme de la physique statistique :

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$$

**Densité de particules ayant une vitesse c au point x et au temps t.**

L'évolution des fonctions de distribution  $f$  est régie par l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$



# L'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

*Propagation des particules*      *Forces extérieures négligées*      *Collision entre les particules*

En prenant en compte toutes les valeurs de vitesses possibles pour les particules on peut facilement remarquer le lien entre la densité du fluide et les fonctions de distribution:

$$\rho = \int_{\mathcal{R}^3} f d\mathbf{c} \quad \text{Somme de toutes les fonctions de distribution en un point.}$$

De manière analogue, on a:

$$\rho \mathbf{u} = \int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{c} f d\mathbf{c} \quad \text{Vitesse en un point}$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} |\mathbf{c}|^2 f d\mathbf{c} \quad \text{Energie interne et énergie cinétique}$$

Ce sont les « **moments** » des fonctions de distribution

# L'équation de Boltzmann

**L'opérateur de collision:** Effet statistique des collisions entre particules.

Historiquement Boltzmann défini cet opérateur en considérant les particules comme des sphère dures et en faisant certaines hypothèses de collision élastiques, il arrive au résultats:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int d\mathbf{c}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| [f(\mathbf{c}'_1) f(\mathbf{c}'_2) - f(\mathbf{c}_1) f(\mathbf{c}_2)]$$

*Après collision*                    *Avant collision*

=> Forme complexe de l'opérateur. Les hypothèses de construction ne permettent pas la description des gaz denses (même l'air).... Pas très adapté à l'aérodynamique. Par contre, bon pour la description des gaz de faible densité (haute atmosphère).

Il faut trouver une autre façon de décrire l'effet des collisions.

# L'équation de Boltzmann

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int d\mathbf{c}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| [f(\mathbf{c}'_1) f(\mathbf{c}'_2) - f(\mathbf{c}_1) f(\mathbf{c}_2)]$$

*Après collision*                    *Avant collision*

« Quel serait la forme des fonctions de distribution qui annule l'opérateur de collision ? »

« Que se passe-t-il lorsque le gaz est en équilibre thermodynamique (pas de collision entre particule) ? »

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = 0 \quad \longrightarrow \quad f^{eq}(\mathbf{c}'_1) f^{eq}(\mathbf{c}'_2) = f^{eq}(\mathbf{c}_1) f^{eq}(\mathbf{c}_2)$$
$$\ln f^{eq}(\mathbf{c}'_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}'_2) = \ln f^{eq}(\mathbf{c}_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}_2)$$

On peut montrer que les fonctions de distributions à l'équilibre vérifient une propriété d'invariant de collision. Elles peuvent alors s'écrire sous la forme:

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \rho \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (\mathbf{c} - \mathbf{u})^2 \right]$$

C'est la distribution de Maxwell-Boltzmann

# L'équation de Boltzmann

En 1954, Bathnagar Gross et Krook, proposent de définir un opérateur de collision très simple traduisant le fait qu'après une collision, les particules atteignent un équilibre en un temps caractéristique lambda. Ils définissent alors:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}] \quad \text{C'est l'opérateur de collision BGK}$$

Dans ces conditions, l'équation de Boltzmann s'écrit:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]$$

C'est l'équation de Boltzmann-BGK

# Le Développement de Chapman Enskog

« Quel est le liens entre l'équation de Boltzmann-BGK et les équations de Navier-Stokes ?»

On peut commencer à répondre en constatant que:

$$\int_{\mathcal{R}^3} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}] \right] d\mathbf{c} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

*Équation de continuité  
(conservation de la masse)*

$$\int_{\mathcal{R}^3} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}] \right] \mathbf{c} d\mathbf{c} \rightarrow \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + P_{ij})}{\partial x_i} = 0$$

$$\int_{\mathcal{R}^3} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}] \right] |\mathbf{c}^2| d\mathbf{c} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u_i E + u_j P_{ij} + q_i)}{\partial x_i} = 0$$

# Le Développement de Chapman Enskog

$$P_{ij} = \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f d\mathbf{c} \quad q_i = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{c}$$

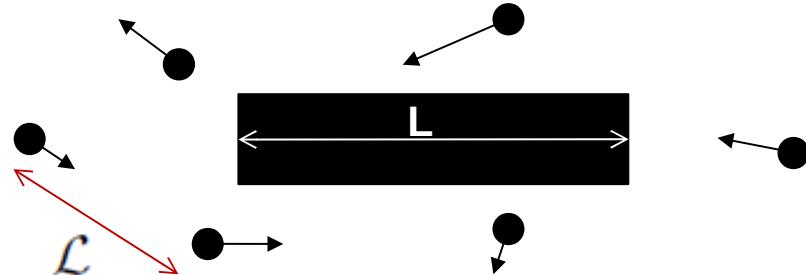
Problème: P et q dépendent des fonctions de distributions. On ne peut donc pas calculer explicitement leur valeur.

Pour ça, Chapman et Enskog proposent une technique de fermeture en développant les fonctions de distribution en terme du nombre de Knudsen.

**Le Nombre de Knudsen**

$$\epsilon = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\lambda_0 \sqrt{rT_0}}{L}$$

*Exprime le rapport entre le libre parcourt moyen des particules et une dimension caractéristique.*



*Le libre parcourt moyen défini la distance moyenne durant laquelle les particules ne subissent aucune collision*

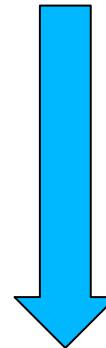
$\epsilon > 1$  peu d'effet des collisions sur l'obstacle  
(gaz de faible densité)

$\epsilon < 1$  fort effet des collisions sur l'obstacle  
(gaz dense)

# Le Développement de Chapman Enskog

On peut faire apparaître le nombre de Knudsen dans l'équation de Boltzmann-BGK en utilisant des grandeurs sans dimension:

$$\tilde{t} = t \frac{\sqrt{rT_0}}{L} \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad r\tilde{T} = \frac{T}{T_0} \quad \tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{rT_0}} \quad \tilde{f} = \frac{f}{\rho_0}$$



$$\epsilon = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\lambda_0 \sqrt{rT_0}}{L}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{c}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{1}{\epsilon \tilde{\lambda}} [\tilde{f} - \tilde{f}^{eq}]$$

# Le Développement de Chapman Enskog

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{c}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{1}{\epsilon \tilde{\lambda}} [\tilde{f} - \tilde{f}^{eq}]$$

Développement en nombre de Knudsen des fonctions de distribution:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

On peut alors injecter ce développement dans l'équation de Boltzmann-BGK en gardant les termes d'ordre 0 et 1 et identifier les termes de même ordre en epsilon:

**Termes en  $\epsilon^{-1}$ :**  $f^{(0)} = f^{eq}$

**Termes en  $\epsilon^0$ :**  $\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(1)}$

**Termes en  $\epsilon^1$ :**  $\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(2)}$

# Le Développement de Chapman Enskog

Ainsi à l'ordre 0 en epsilon on trouve

$$P_{ij}^0 = \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f^{eq} d\mathbf{c}$$

$$q_i^0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f^{eq} d\mathbf{c}$$

Que l'on peut expliciter puisqu'ils dépendent cette fois de la fonction d'équilibre (qui est connue), on trouve:

$$P_{ij}^0 = \rho r T \delta_{ij}$$

$$q_i^0 = 0$$

=> On retrouve les **équations d'Euler** !

Et à l'ordre 1 en epsilon on trouve

$$P_{ij}^{(1)} = P_{ij}^0 + \epsilon \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f^{(1)} d\mathbf{c}$$

$$q_i^{(1)} = q_i^0 + \epsilon \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f^{(1)} d\mathbf{c}$$

On trouve cette fois:

$$P_{ij}^{(1)} = p \delta_{ij} - \tau \rho r T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \tau \rho r T \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$q_i^{(1)} = -\frac{D+2}{2} \tau \rho r T \frac{\partial r T}{\partial x_i}$$

=> On retrouve les **équations de Navier-Stokes** en posant:

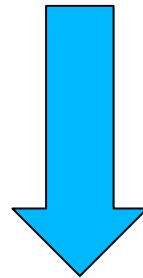
$$\mu = \tau \rho r T \quad \text{Coeff de viscosité}$$

$$\kappa = \frac{D+2}{2} \tau \rho r T \quad \text{Coeff de diffusivité thermique}$$

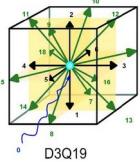
# Le Développement de Chapman Enskog

Conclusion:

- Les équations d'Euler sont une approximation de l'équation de Boltzmann-BGK à l'ordre 0 en nombre de Knudsen.
- Les équations de Navier-Stokes sont une approximation de l'équation de Boltzmann-BGK à l'ordre 1 en nombre de Knudsen.



***Les équations de la mécanique des milieux continues sont valables pour les faibles nombres de Knudsen  
c'est-à-dire  
pour les milieux suffisamment denses par rapport à la taille de l'objet étudié.***



# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discréétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermite

Les quadratures de Gauss-Hermite

Obtention des réseaux standards

Discréétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme *Stream & Collide*

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]

# Les polynômes d'Hermite

$$\mathbf{x} = [x, y]^T$$

Version scalaire:  $\omega(x) = e^{-x^2/2}$

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} \omega(x)$$

$$H_0(x) =$$

$$H_1(x) =$$

$$H_2(x) =$$

$$H_3(x) =$$

$$H_4(x) =$$

Version vectorielle:  $\omega(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2/2} = e^{-(x^2+y^2)/2}$

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{x}) = (-1)^n \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} \nabla^n \omega(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{H}_0([x, y]) =$$

$$\mathcal{H}_1([x, y]) =$$

$$\mathcal{H}_2([x, y]) =$$



# Les polynômes d'Hermite

$$\mathbf{x} = [x, y]^T$$

Version scalaire:  $\omega(x) = e^{-x^2/2}$

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} \omega(x)$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = x^4 + 6x^2 + 3$$

Version vectorielle:  $\omega(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2/2} = e^{-(x^2+y^2)/2}$

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{x}) = (-1)^n \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} \nabla^n \omega(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{H}_0([x, y]) = 1$$

$$\mathcal{H}_1([x, y]) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2([x, y]) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & xy \\ xy & y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

# Les polynômes d'Hermite

$$f^{eq}(\rho, \mathbf{u}, T, \mathbf{c}) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-(\mathbf{c}-\mathbf{u})^2/(2\theta)}$$

$$\theta = k_B T$$

**Idée de Grad (1949):** Développer la distribution d'équilibre en polynômes d'Hermite.

$$f^{eq}(\rho, \mathbf{u}, T, \mathbf{c}) = \omega(\mathbf{c}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{a}^{(n),eq}(\rho, \mathbf{u}, T) \cdot \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c})$$

$$\mathbf{a}^{(n),eq}(\rho, \mathbf{u}, T) = \int f^{eq}(\rho, \mathbf{u}, T, \mathbf{c}) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) d\mathbf{c}$$

On peut facilement montrer que les premiers coefficients correspondent aux premiers moments de la fonction d'équilibre.

$$\mathbf{a}^{(0),eq}(\rho, \mathbf{u}, T) = \rho$$

$$\mathbf{a}^{(1),eq}(\rho, \mathbf{u}, T) = \rho u_i$$

$$\mathbf{a}^{(2),eq}(\rho, \mathbf{u}, T) = \rho [u_i u_j + (\theta - 1)\delta_{ij}]$$

---



# Les polynômes d'Hermite

Exemple développement à l'ordre 2:

$$f^{eq} = \omega(\mathbf{c}) \left( \mathbf{a}^{(0),eq} \cdot \mathcal{H}^{(0)} + \mathbf{a}^{(1),eq} \cdot \mathcal{H}^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^{(2),eq} \cdot \mathcal{H}^{(2)} \right)$$

$$f^{eq} = \rho \omega(\mathbf{c}) \left( 1 + c_i u_i + \frac{1}{2} [u_i u_j + (\theta - 1) \delta_{ij}] [c_i c_j - \delta_{ij}] \right)$$

$$f^{eq} = \rho \omega(\mathbf{c}) \mathcal{P}(\mathbf{c})$$

Hypothèse isotherme:  $\theta = 1$

$$f^{eq} = \rho \omega(\mathbf{c}) \left( 1 + c_i u_i + \frac{1}{2} [u_i u_j] [c_i c_j - \delta_{ij}] \right)$$

$$f^{eq} = \rho \omega(\mathbf{c}) \left( 1 + \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + \frac{[\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}]^2}{2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$



# La quadrature de Gauss-Hermite

Si  $N \leq 2n - 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathbf{x}) P^{(N)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\omega(x) = e^{-x^2/2}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n w_\alpha P^{(N)}(x_\alpha)$$

abscisses

$$x_\alpha; H^{(n)}(x_\alpha) = 0$$

⚠ Polynômes scalaires

poids

$$w_\alpha = \frac{n!}{(nH^{(n-1)}(x_\alpha))^2}$$

On peut donc trouver des vitesses discrètes  $c_\alpha$  telles que:

$$\mathbf{a}^{(n),eq} = \int f^{eq} \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = \int \rho \omega(\mathbf{c}) \mathcal{P}(\mathbf{c}) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = \rho \sum_{\alpha=1}^q w_\alpha \mathcal{P}(c_\alpha) \mathcal{H}^{(n)}(c_\alpha)$$

$$f^{eq} = \rho \omega(\mathbf{c}) \left( 1 + \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + \frac{[\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}]^2}{2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \quad \rightarrow \quad f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u} + \frac{[\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}]^2}{2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

# Discrétisation des Vitesses

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]$$

**But:** Résoudre numériquement l'équation de Boltzmann-BGK !

**Problème:** Les variables  $\mathbf{c}$  représentent les vitesses des particules et varient dans un espace continu de dimension infini (toutes les valeurs réelles possibles)

**Condition:** Il faut donc restreindre l'espace des vitesses à un ensemble discret et fini !

**Comment ?:** En utilisant un développement polynomial de la fonction d'équilibre et une quadrature de Gauss. Il faut donc assurer l'égalité des moments continues et discrets:

$$\int f^{eq} \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = \rho \sum_{\alpha=1}^q w_\alpha P(c_\alpha) \mathcal{H}^{(n)}(c_\alpha)$$

Moments continues                          Moments discrets  
Nombre de vitesses discrètes

# Discrétisation des Vitesses

Les vitesses discrètes sont donc obtenues en résolvant la quadrature de Gauss. En pratique on utilise un produit de D quadratures 1D pour résoudre un problème à D dimension. Il existe plusieurs solutions entraînant différentes valeurs de q (Cf TP0)

On obtient toujours  $q^D$  vitesses discrètes où D est le nombre de dimensions d'espace.

- ✓  $q=5$  : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 4 => 125 vitesses discrètes qui dépendent de la Température => Non acceptable.

## Hypothèse isotherme:

- ✓  $q=4$  : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 3 => 64 vitesses mais incompatibilité de maillage cubique.
- ✓  $q=3$  : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 2 => 27 Vitesses mais erreur sur les moments d'ordre 3:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \tau \frac{\partial \rho u_i u_j u_k}{\partial x_k}$$

$\mathcal{O}(M^3)$

**Limitation à l'étude des écoulements à faible nombre de Mach (faiblement compressible)**

# Discrétisation des Vitesses

	$c_\alpha$	$w_\alpha$	D=1	D=2	D=3
	0	1			
<i>Moments conservés jusqu'à l'ordre 1</i>	$\pm 1$	$1/2$	$\longrightarrow$	D1Q2	$\longrightarrow$
<i>Moments conservés jusqu'à l'ordre 2</i>	$\frac{0}{\pm\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$	$\longrightarrow$	D1Q3	$\longrightarrow$
				D2Q9	$\longrightarrow$
					D3Q27

En pratique on s'arrange pour que les vitesses discrètes coïncident avec des points de maillages:

$$\mathbf{c}_\alpha = \frac{\mathbf{c}_\alpha}{||\mathbf{c}_\alpha||} = \frac{\mathbf{c}_\alpha}{\widehat{c}_0}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{c}_\alpha||} = \frac{\mathbf{u}}{\widehat{c}_0}$$

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u} + \frac{[\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}]^2}{2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$



$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{\widehat{c}_0^2} + \frac{[\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}]^2}{2\widehat{c}_0^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\widehat{c}_0^2} \right)$$

# Discrétisation des Vitesses

Ainsi, dans l'hypothèse des *écoulements isothermes faiblement compressibles*, on peut résoudre l'équation de Boltzmann-BGK à vitesses discrètes:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha - f_\alpha^{eq}]$$

Ou la fonction d'équilibre s'écrit:

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{\widehat{c}_0^2} + \frac{[\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}]^2}{2\widehat{c}_0^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\widehat{c}_0^2} \right)$$

Les coefficients dépendent du modèle choisi.

Les moments se calculent alors facilement de façon discrète:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha$$

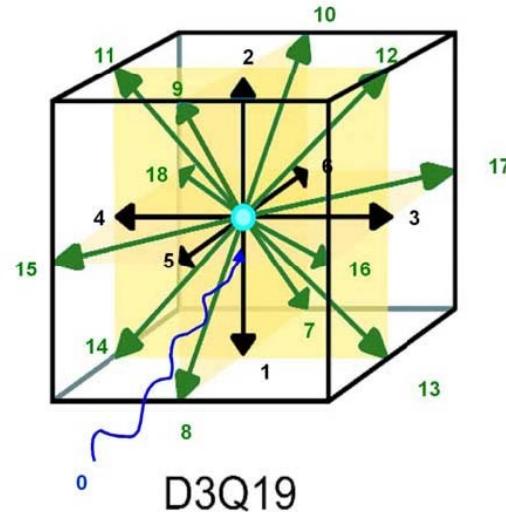
$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha |\mathbf{c}_\alpha|^2 f_\alpha$$

# Discrétisation des Vitesses

En 3D, on peut montrer que certaines vitesses du modèle à 27 vitesses ne « servent » à rien. On peut alors utiliser 19 vitesses seulement, c'est le modèle **D3Q19** (3 dimensions et 19 vitesses)

Les coefficients sont alors donnés par:



$\alpha$	1	2-7	8-19
$\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$	(0, 0, 0)	(0, 0, ±1) (0, ±1, 0) (±1, 0, 0)	(0, ±1, ±1) (±1, ±1, 0) (±1, 0, ±1)
$\omega_\alpha$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Quadrature d'ordre 3:  $\rightarrow \hat{c}_0 = \sqrt{rT} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_\alpha \left( 1 + 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha + \frac{9}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha)^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{u}|^2 \right)$$

# Discrétisation de l'espace et du temps

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha - f_\alpha^{eq}]$$

Equation de Boltzmann-BGK à vitesses discrètes mais continue en espace et en temps.

Certaines études utilisent les méthodes de discrétisation classiques (schéma en espace et en temps avec différences finies ou volume finis). Mais on peut remarquer que le membre de gauche de l'équation est linéaire et représente une équation de propagation. Ainsi on peut utiliser une discrétisation dans laquelle l'espace et le temps sont couplés, traduisant le fait que les particules se déplacent à une vitesse caractéristique  $c$ . On obtient alors:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \underbrace{c_\alpha \Delta t}_{\text{couplage}}, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} [f_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha s, t + s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + c_\alpha s, t + s)] ds$$

*Calcul de l'intégrale avec la méthode des trapèzes  
+ changement de variable*

$$g_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t))$$

Equation de Boltzmann sur réseau (**LBM** pour *Lattice Boltzmann Method*)

$$g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + O(\Delta t^3)$$

$$\tau_g = \tau + \frac{1}{2} \text{ et } g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}$$

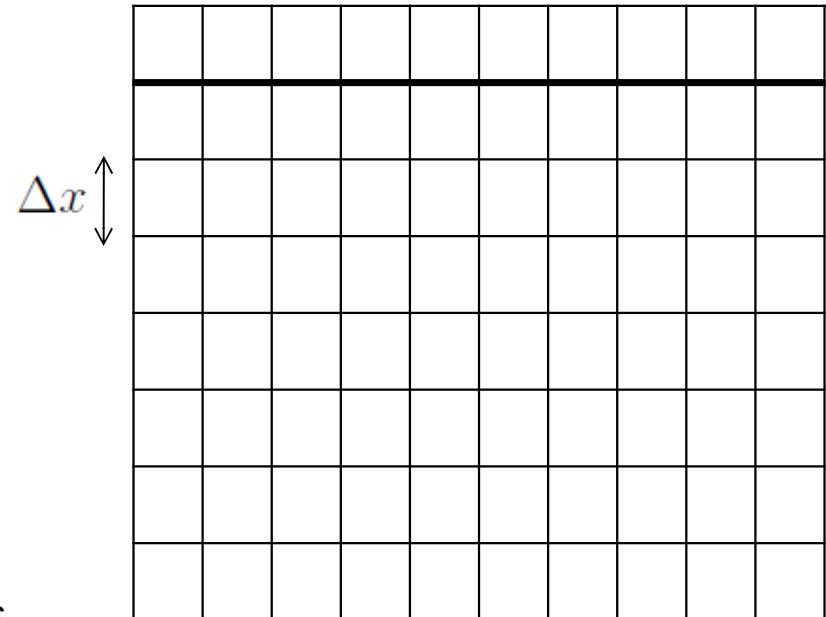


# Discrétisation de l'espace et du temps

$$g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + O(\Delta t^3)$$

En pratique, la LBM fixe un certain nombre de paramètres :

- ✓ La *vitesse du son* liée au réseau s'exprime sous la form  $\hat{c}_0 = \sqrt{\hat{r}\hat{T}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ✓ Le fluide simulé possède donc un coefficient gamma égale à l'unité. Ceci n'est pas très restrictif sous les hypothèses de faible compressibilité



*La LBM impose (par construction) un maillage structuré uniforme carré en 2D ou cubique en 3D*



# Discrétisation de l'espace et du temps

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g}(g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t))$$

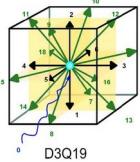
L'algorithme de la LBM s'écrit en unité réseau (Lattice Unit):  $\widehat{\Delta t} = \widehat{\Delta x} = 1$

On choisit de faire une simulation dans un domaine  $L$  comportant  $N_x$  mailles d'un fluide de viscosité donnée  $\nu$ . La vitesse du son est également fixée à  $c_0$ .  
On a donc:

The diagram illustrates the relationship between spatial and temporal discretization. It consists of two dashed boxes. The left box, bounded by blue dashed lines, contains the equation  $\Delta x = \frac{L}{N_x}$  with the word "Fixé" above it. Below it is the equation  $c_0 = \hat{c}_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t \sqrt{3}}$ . A blue arrow labeled "Permet de calculer" points from the left box to the right box. The right box, bounded by red dashed lines, contains the equation  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c_0 \sqrt{3}}$  and the equation  $\hat{\tau}_g = \frac{\nu \sqrt{3}}{\Delta x c_0} + \frac{1}{2}$ .

**Conséquence: Le CFL est toujours constant et vaut:**

$$CFL = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = \hat{c}_0 \frac{\widehat{\Delta t}}{\widehat{\Delta x}} = \hat{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sim 0.577$$



# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discrétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermites

Les quadratures de Gauss-Hermites

Obtention des réseaux standards

Discrétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme *Stream & Collide*

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]



# Algorithme LBM

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t))$$

On décompose l'algorithme principal en 2 étapes bien distinctes:

## La *Collision*

$$g_\alpha^{coll}(i, t) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t))$$

Cette étape est locale elle ne nécessite aucune lecture des voisins. Elle est donc très rapide.

## La *Propagation*

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^{coll}(i, t) \quad \text{ou} \quad g_\alpha(i, t) = g_\alpha^{coll}(i - \hat{c}_\alpha, t - 1)$$

Bien que ces deux étapes soient théoriquement identiques, elles présentent des différences d'exécution en fonction du type de machine utilisée.

Ce type d'algorithme "**Stream & Collide**" présente une efficacité redoutable sur les machines modernes.





# Algorithme LBM

Evaluation des temps de calcul de l'algorithme:  $\eta = \frac{10^{-6}N_{lu}}{T_r}$  MLUPS  
Mega Lattice Updates Per Second

$$N_{lu} = N_p \times N_t$$

Nombre de points      Nombre d'itérations

## La *Collision*

$$g_\alpha^{coll}(i, t) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\widehat{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t))$$

$$\eta_{coll} \sim 10\% \eta_{tot}$$

## La *Propagation*

$$g_\alpha(i + \widehat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^{coll}(i, t) \quad \text{ou} \quad g_\alpha(i, t) = g_\alpha^{coll}(i - \widehat{c}_\alpha, t - 1)$$

$$\eta_{prop} \sim 60\% \eta_{tot}$$



# Algorithme LBM

Algorithme générale:

1. Initialisation du domaine physique (rho et u)
2. Calcul de  $f_\alpha^{eq}$
3. Initialisation des fonctions de distributions:  $g_\alpha = f_\alpha^{eq}$
4. Boucle temporelle

**Collision**      
$$g_\alpha^{coll}(i, t) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\bar{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t))$$

**Propagation**    
$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^{coll}(i, t)$$

**Calcul des conditions aux limites**

**Calcul des moments**      
$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha \quad \rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha$$

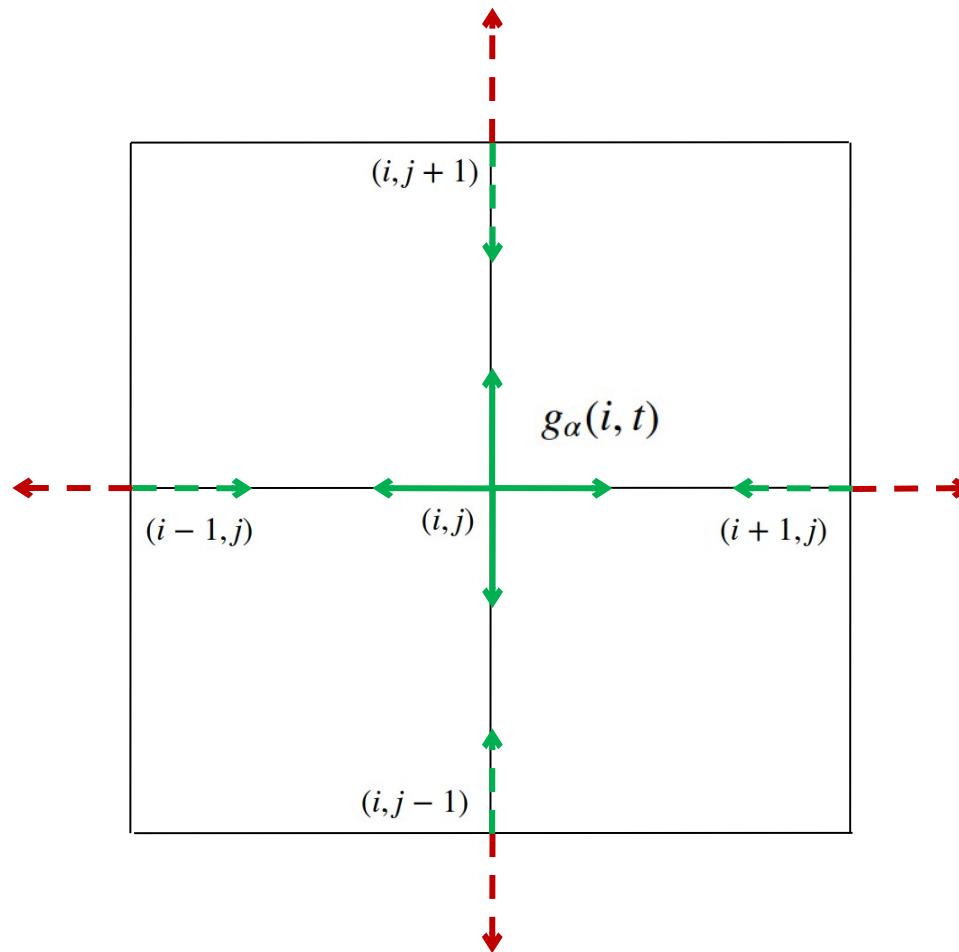
**Calcul de l'équilibre:**      
$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_\alpha \left( 1 + 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha + \frac{9}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha)^2 - \frac{3}{2} |\mathbf{u}|^2 \right)$$

# Collision et propagation

## *Etat pré-Collision*

Exemple avec 4 vitesses:

*Itération n*



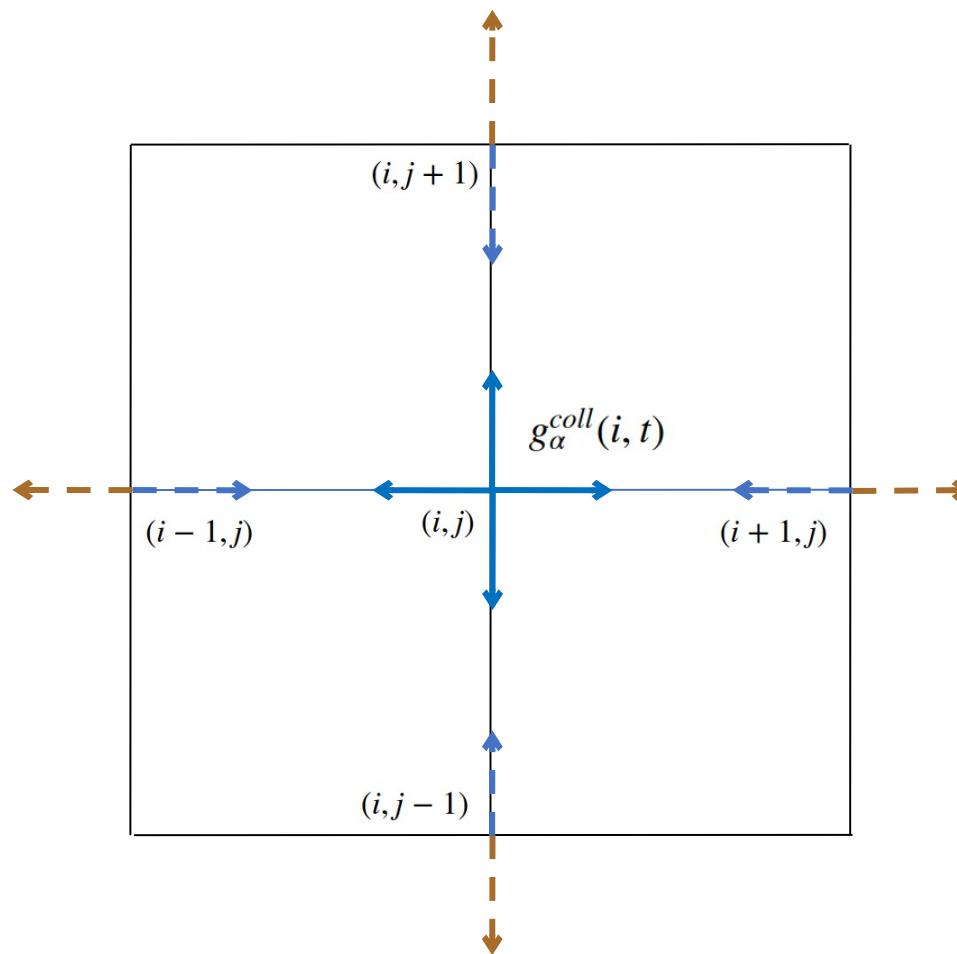
Calcul de l'opérateur de collision en chaque point => Les nouvelles fonctions de distributions sont connues

# Collision et propagation

**Collision**       $g_{\alpha}^{coll}(i, t) = g_{\alpha}(i, t) - \frac{1}{\widehat{\tau}_g} (g_{\alpha}(i, t) - g_{\alpha}^{eq}(i, t))$

Exemple avec 4 vitesses:

**Itération n**



Calcul de l'opérateur de collision en chaque point => Les nouvelles fonctions de distributions sont connues

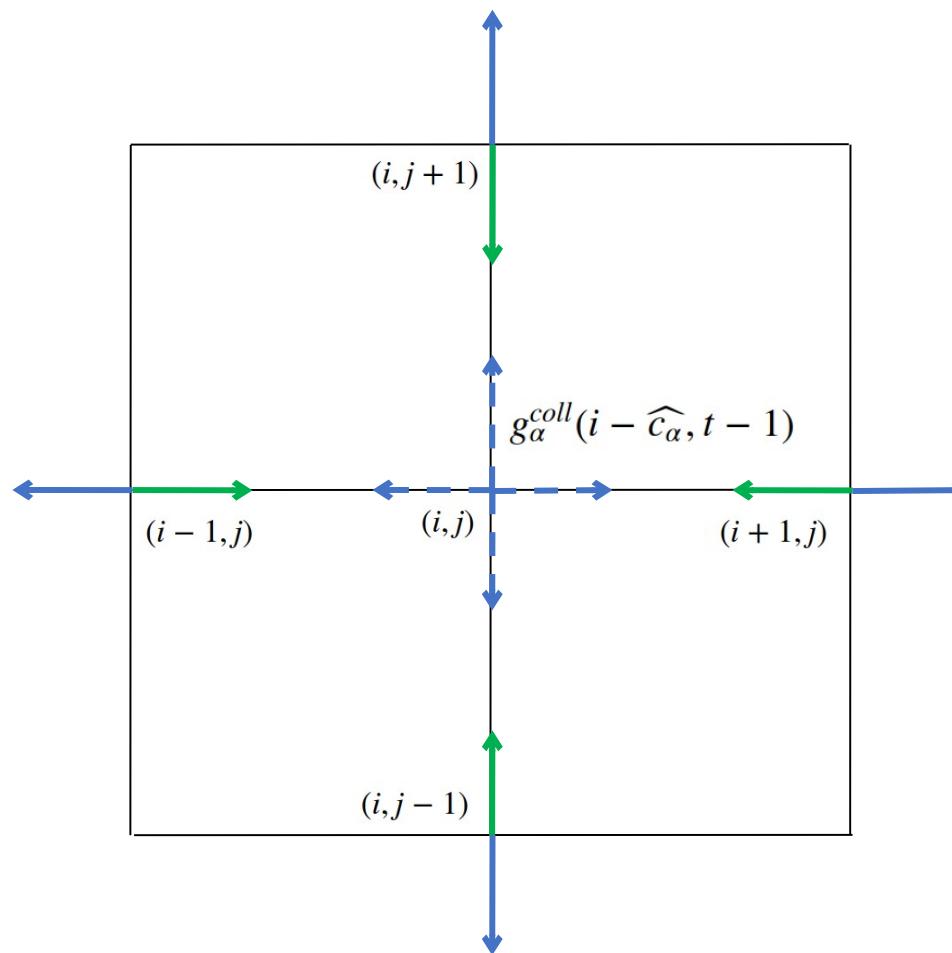
# Collision et propagation

**Propagation**

$$g_\alpha(i, t) = g_\alpha^{\text{coll}}(i - \hat{c}_\alpha, t - 1)$$

Exemple avec 4 vitesses:

**Itération  $n$**

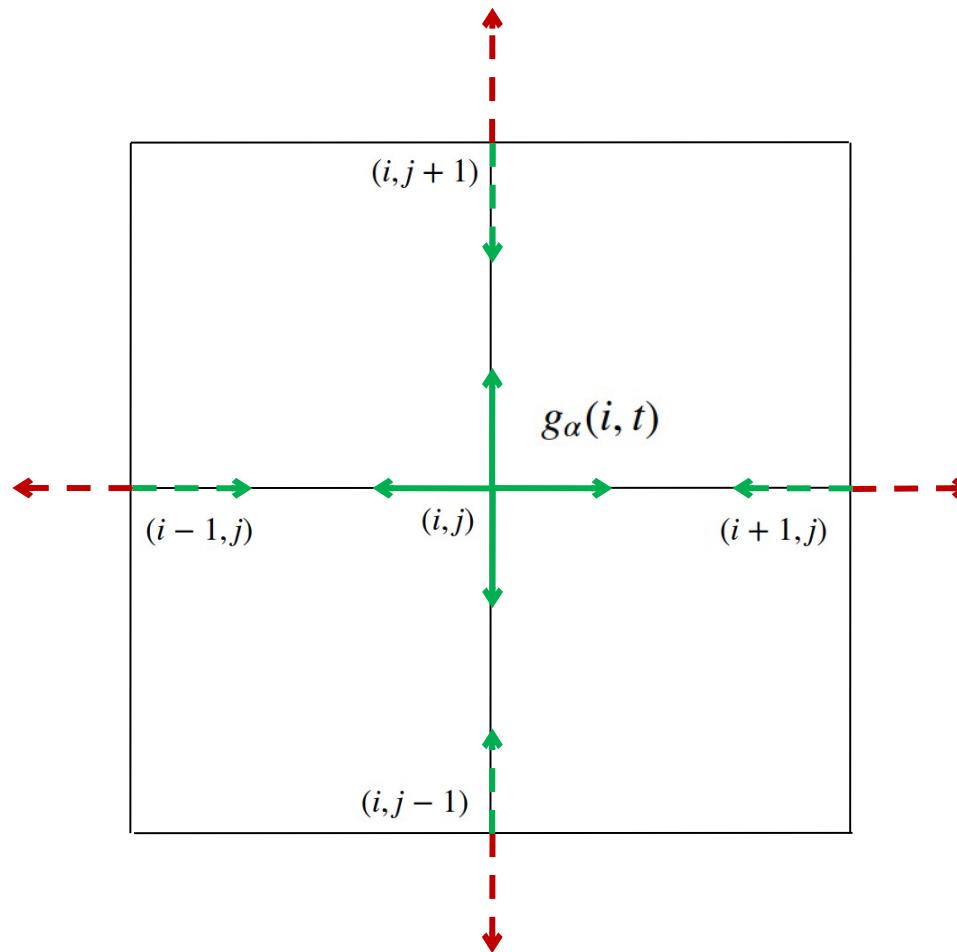


# Collision et propagation

## *Etat pré-Collision*

Exemple avec 4 vitesses:

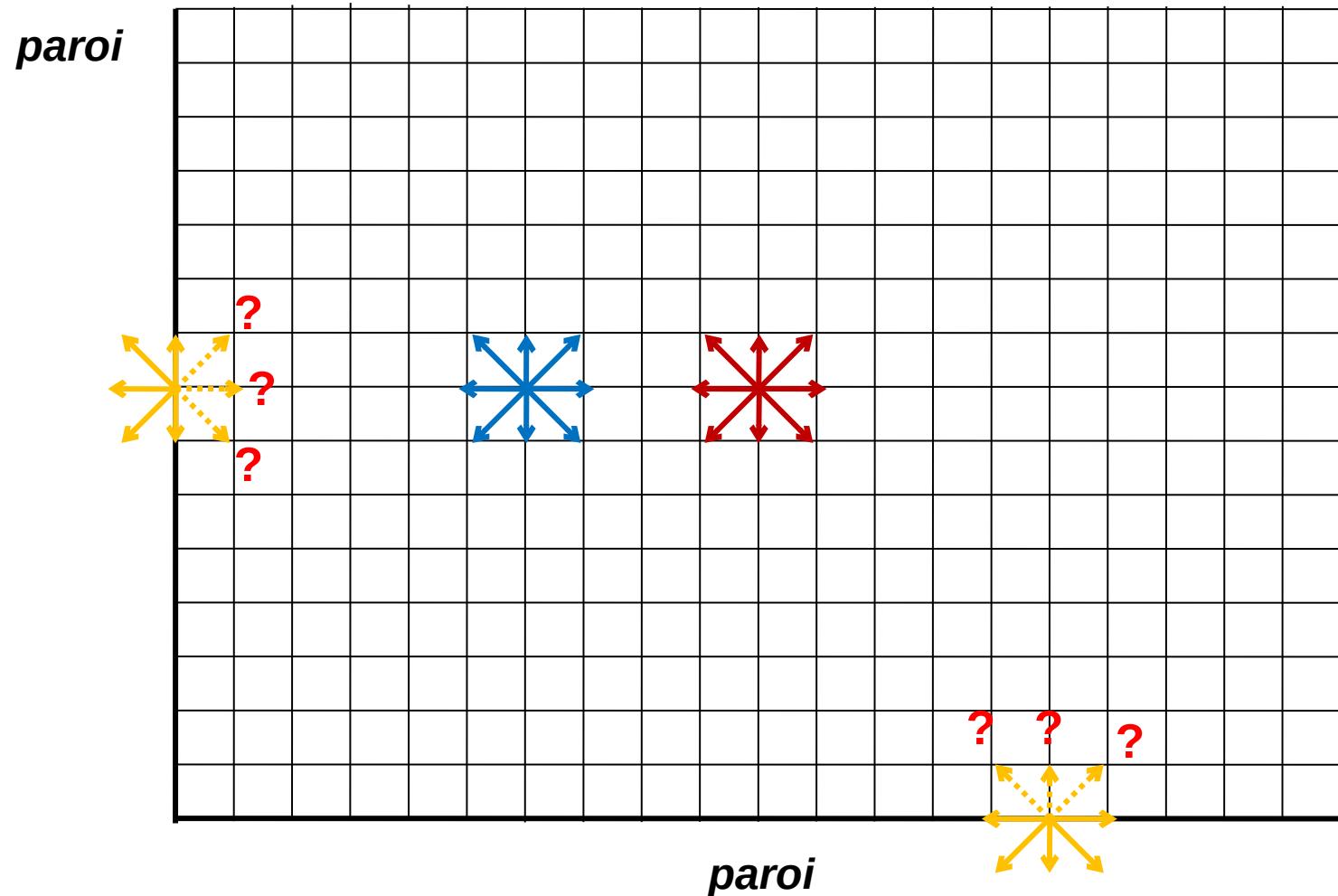
*Itération n+1*



Propagation des fonctions sur les mailles voisines

# Conditions aux limites

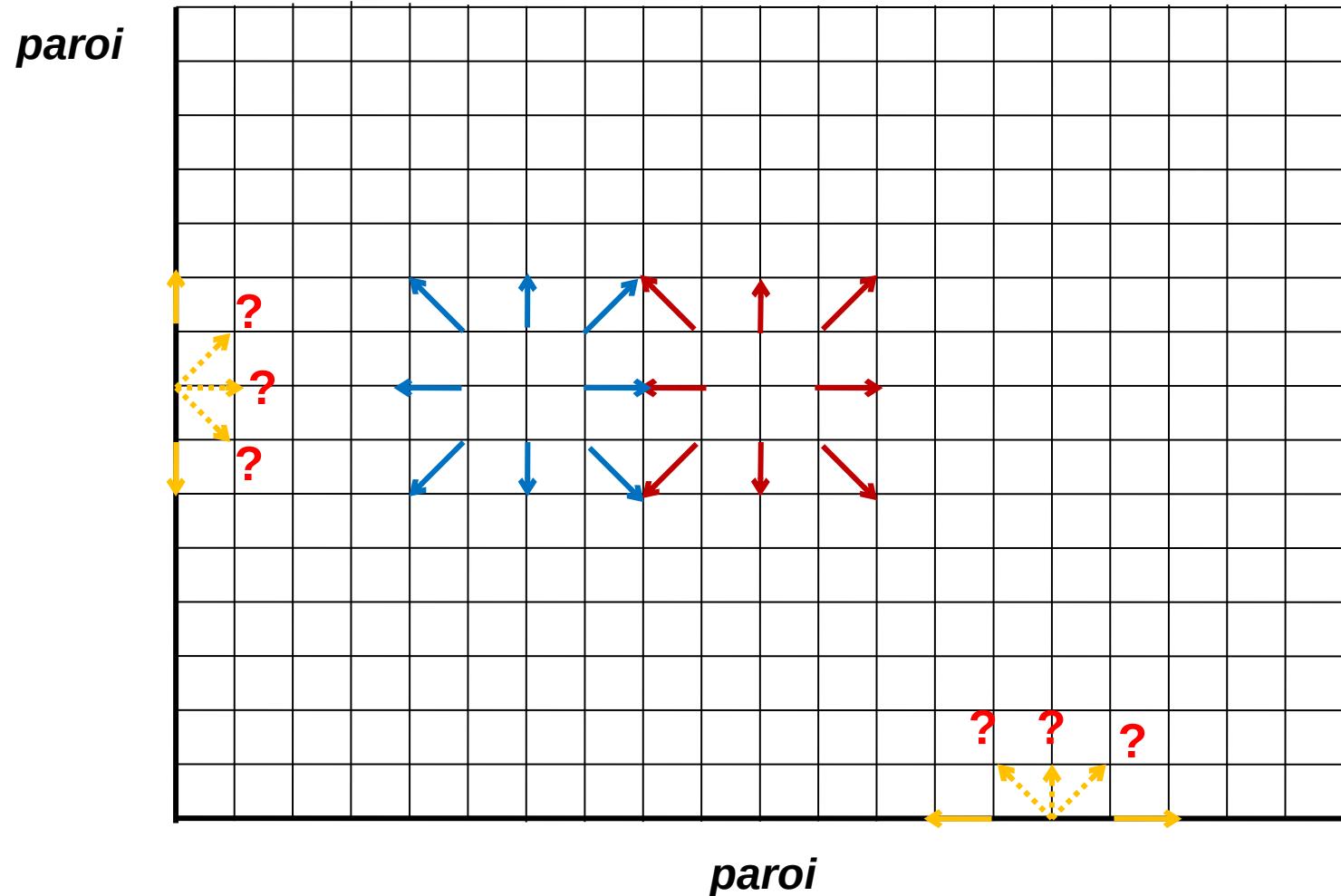
*Aux frontières du domaine de calcul (paroi, entrée, sortie...) certaines fonctions de distribution sont inconnues.*



En LBM les conditions aux limites doivent prescrire les quantités mésoscopiques aux frontières du domaine.

# Conditions aux limites

*Aux frontières du domaine de calcul (paroi, entrée, sortie...) certaines fonctions de distribution sont inconnues.*

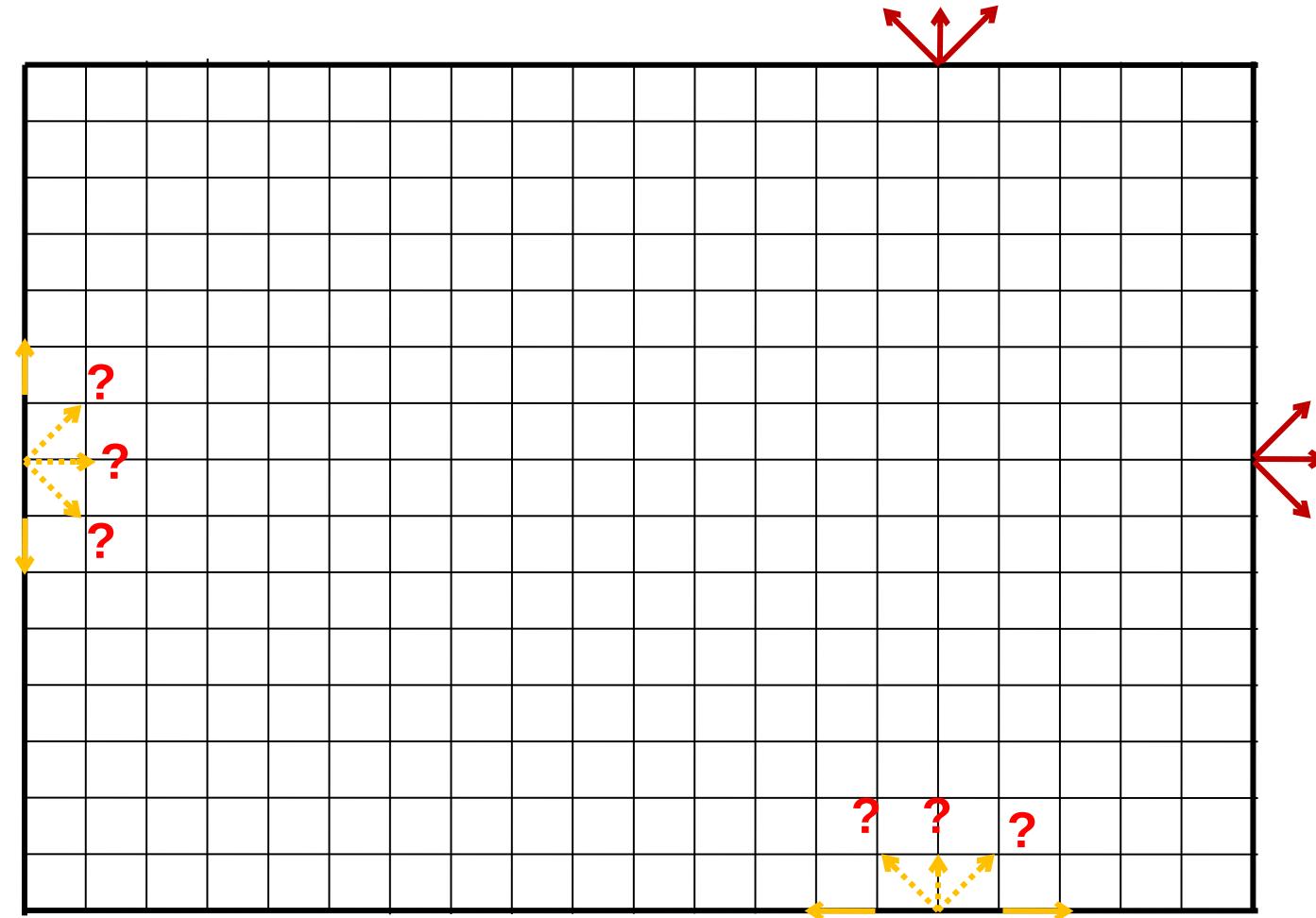


En LBM les conditions aux limites doivent prescrire les quantités mésoscopiques aux frontières du domaine.

# Conditions aux limites

Plusieurs techniques sont utilisées:

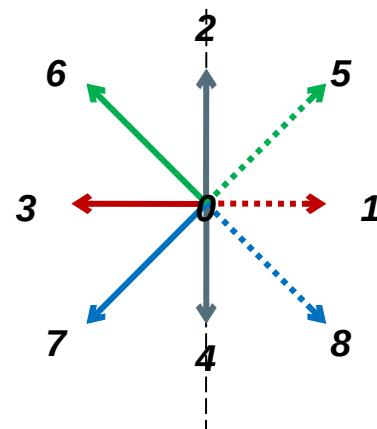
1 – Conditions périodiques:  $g_\alpha(i, t) = g_\alpha^{\text{coll}}(i - \hat{c}_\alpha, t - 1)$



Les vitesses rentrantes deviennent les vitesses sortantes à l'opposé du domaine.

# Conditions aux limites

2– On remplace les fonctions inconnues par leur symétrique à la paroi avant la collision (**Bounce-back method**):

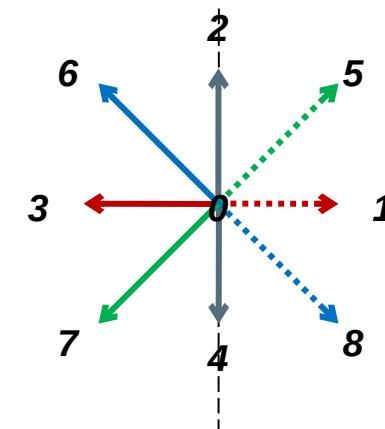


*Rebond sans frottement:*

$$1' = 3$$

$$5' = 6$$

$$8' = 7$$



*Rebond avec frottement:*

$$1' = 3$$

$$5' = 7$$

$$8' = 6$$



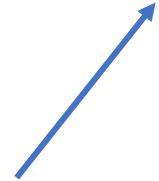
# Conditions aux limites

3– On remplace les parties hors-équilibre par leur symétrique (**Bounce-back** hors équilibre):

$$g_{\alpha}^{neq} = g_{\bar{\alpha}}^{neq} \quad \xleftarrow{\text{Vitesse symétrique}}$$

$$g_{\alpha} - g_{\alpha}^{eq} = g_{\bar{\alpha}} - g_{\bar{\alpha}}^{eq}$$

$$g_{\alpha} = g_{\bar{\alpha}} + (g_{\alpha}^{eq} - g_{\bar{\alpha}}^{eq})$$

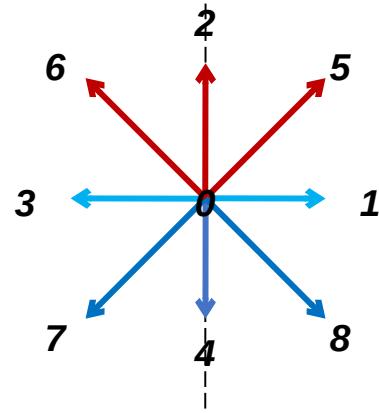


Nécessite la connaissance des grandeurs macroscopiques à la paroi.



# Conditions aux limites

*Calcul de la densité à la paroi:*



	<i>Connues</i>	<i>Inconnues</i>
$\rho_w = \sum_{\alpha} g_{\alpha} =$	$\sum_{\alpha_k} g_{\alpha}^k + \sum_{\alpha_t} g_{\alpha}^t +$	$\sum_{\alpha?} g_{\alpha}^?$
$\rho_w u_w = \sum_{\alpha} c_{\alpha} g_{\alpha} =$	$\sum_{\alpha?} g_{\alpha}^? - \sum_{\alpha_k} g_{\alpha}^k$	
$\sum_{\alpha?} g_{\alpha}^? =$	$\rho_w u_w + \sum_{\alpha_k} g_{\alpha}^k$	
$\rho_w = \rho_w u_w + 2 \sum_{\alpha_k} g_{\alpha}^k + \sum_{\alpha_t} g_{\alpha}^t$		

$$\boxed{\rho_w = \frac{1}{1 - u_w} \left( 2 \sum_{\alpha_k} g_{\alpha}^k + \sum_{\alpha_t} g_{\alpha}^t \right)}$$

# Conditions aux limites

3– Techniques utilisant une fonction d'équilibre modifiée à la paroi:

- On prend une valeur particulière de  $\tau_{\text{aug}}=1$  à la paroi:

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{\text{eq}}(i, t))$$

$$\hat{\tau}_g = 1$$

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^{\text{eq}}(i, t)$$

- Pour que le schéma reste juste, on définit une nouvelle fonction d'équilibre à la paroi prenant en compte les gradients amonts.

$$g_\alpha^{\text{eq}\star}(x, t) = g_\alpha^{\text{eq}} + \epsilon \rho (r_\alpha c_{\alpha,i} c_{\alpha,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + s_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k})$$

- On calcul les coefficients de cette nouvelle fonction d'équilibre grâce à l'égalité des moments.
- On calcul la nouvelle fonction d'équilibre en fixant par exemple une vitesse nulle à la paroi.

# Conditions aux limites

## 4– Techniques type frontière immergées (*Immersed-Boundary*):

On utilise le terme de « forçage » de l'équation de Boltzmann.  
L'algorithme devient:

$$g_{\alpha}^{coll}(i, t) = g_{\alpha}(i, t) - \frac{1}{\widehat{\tau}_g} (g_{\alpha}(i, t) - g_{\alpha}^{eq}(i, t)) + S_{\alpha}(i, t)$$

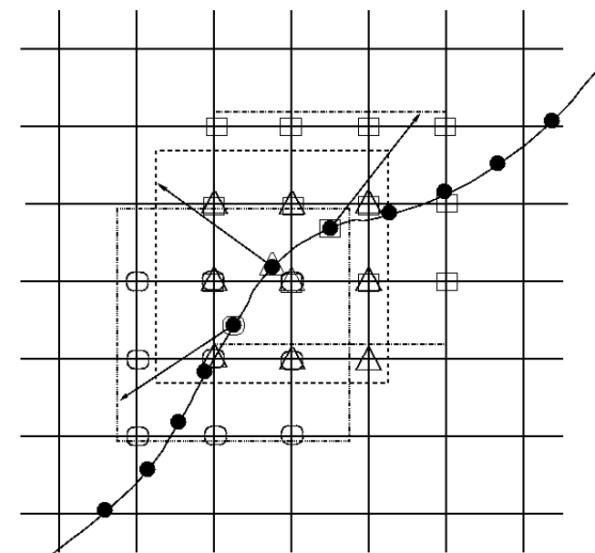
Avec: (Guo et al. 2002)

$$S_{\alpha} = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_g} \right) w_{\alpha} \left( \frac{c_{\alpha,i}}{\widehat{c}_0^2} + \frac{(c_{\alpha,i} c_{\alpha,j} - \widehat{c}_0^2 \delta_{ij}) u_j}{\widehat{c}_0^4} \right) F_i$$

$$\rho u_i = \frac{F_i \Delta t}{2} + \sum_{\alpha} c_{\alpha,i} g_{\alpha}$$

Le terme de forçage est calculé en fonction de la condition aux limites à imposer et appliqué aux points voisins de la paroi.

Forçage "macro" lié à la présence d'une paroi.





# Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:

Principe:

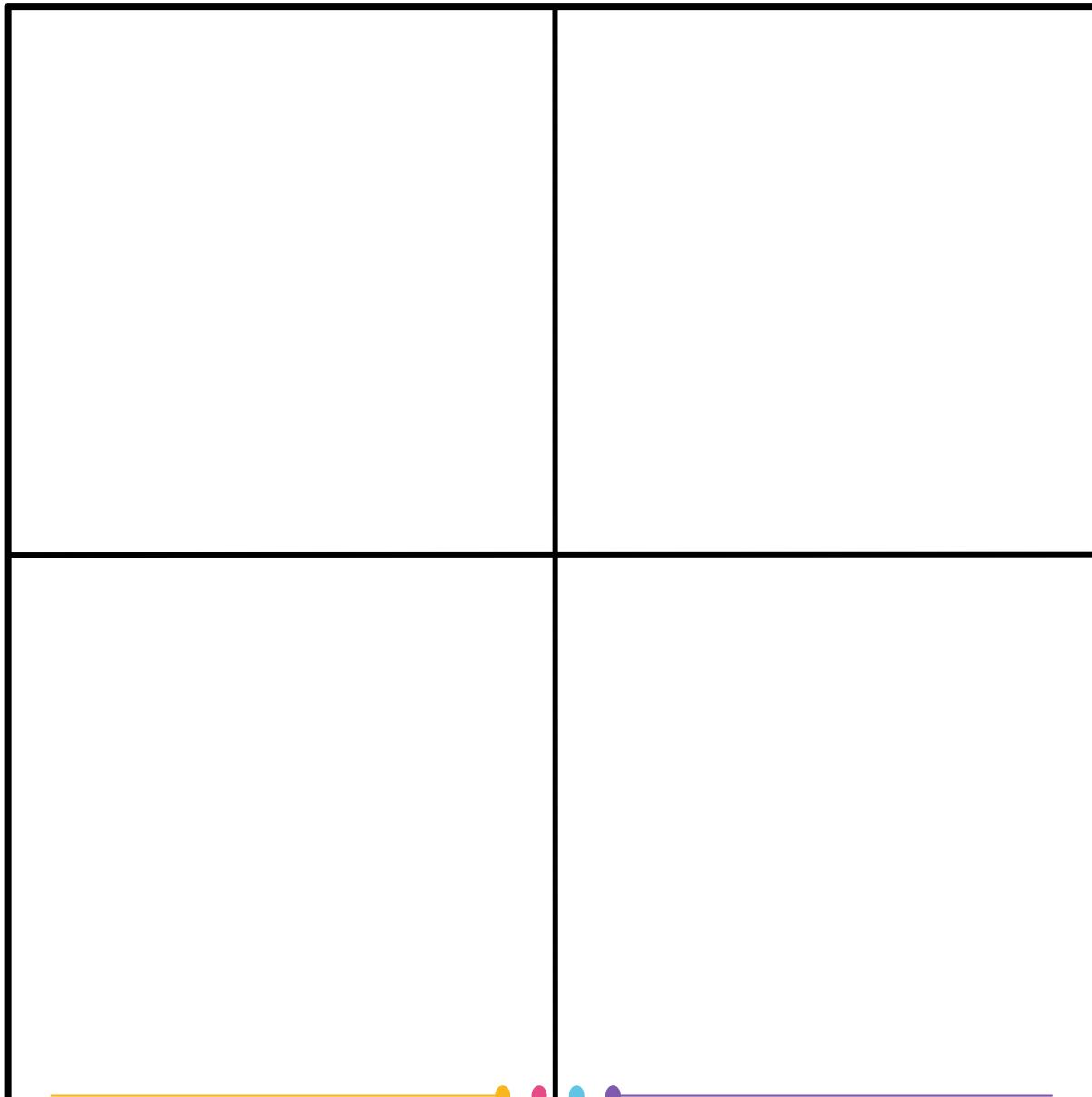
- ✓ Diviser une zone en 4 zones égales (en 2D) ou 8 zones (en 3D).
- ✓ Deux zones adjacentes ont un rapport de taille 2 au maximum.





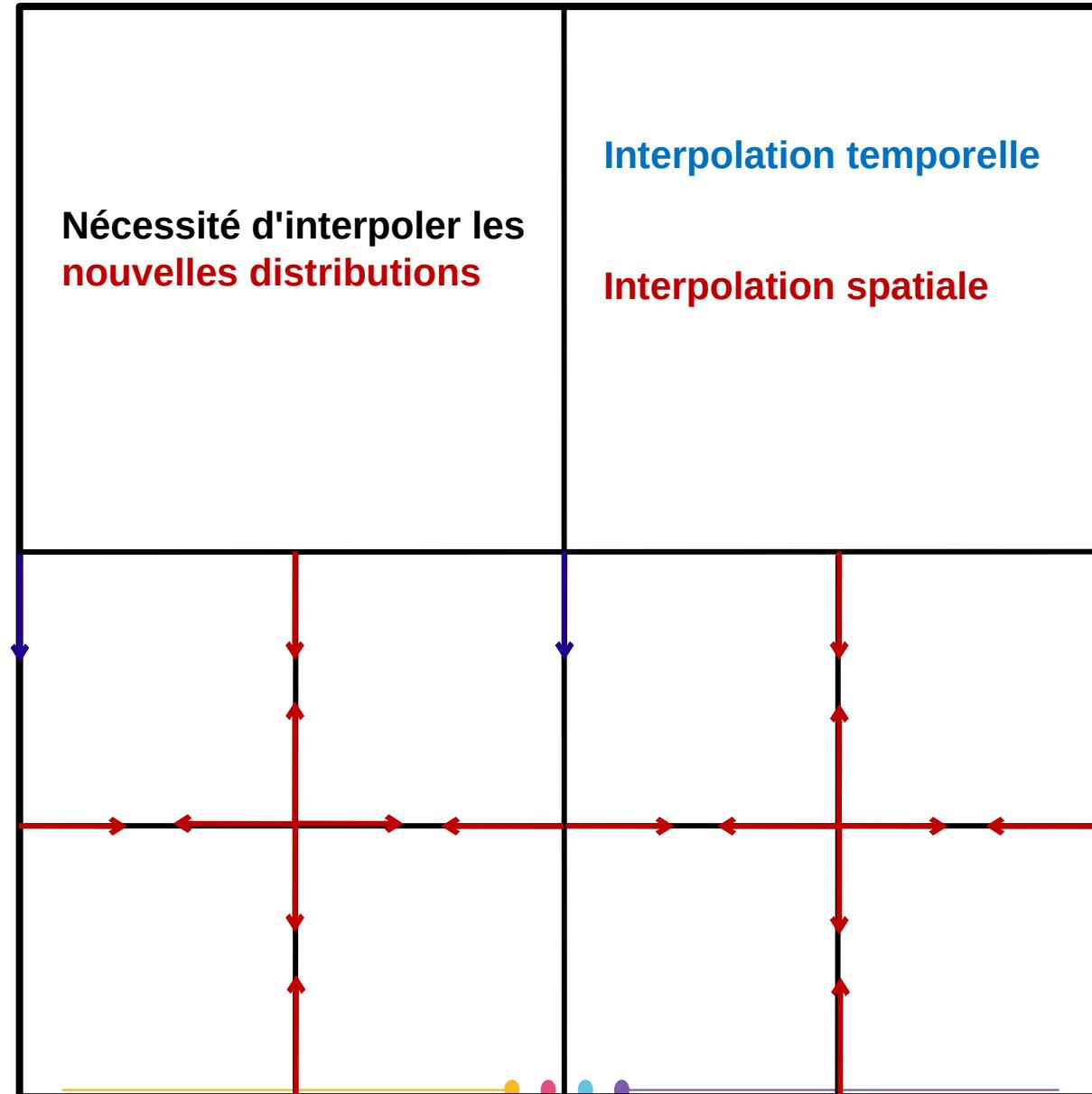
# Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



# Raffinement des maillages

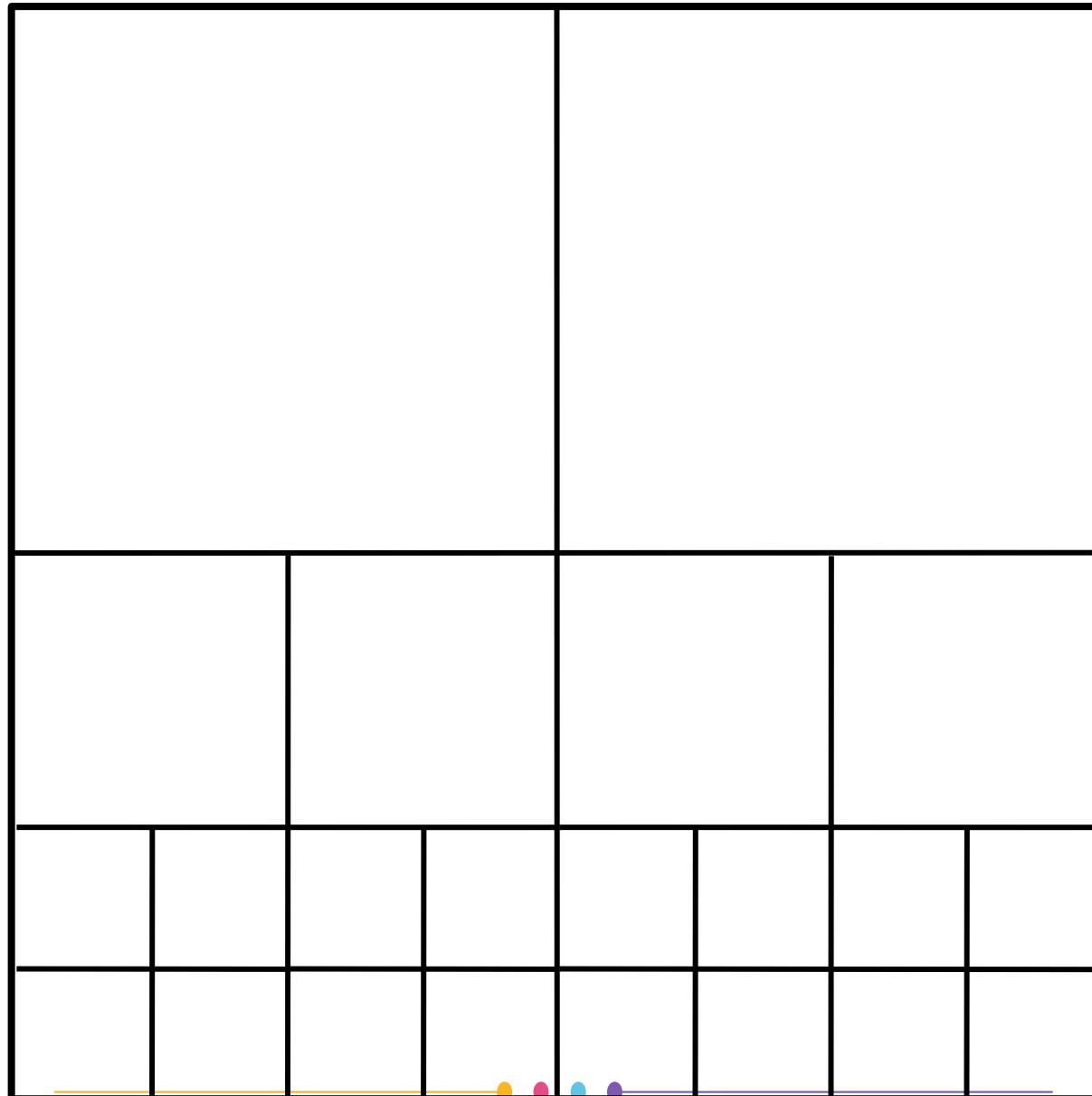
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

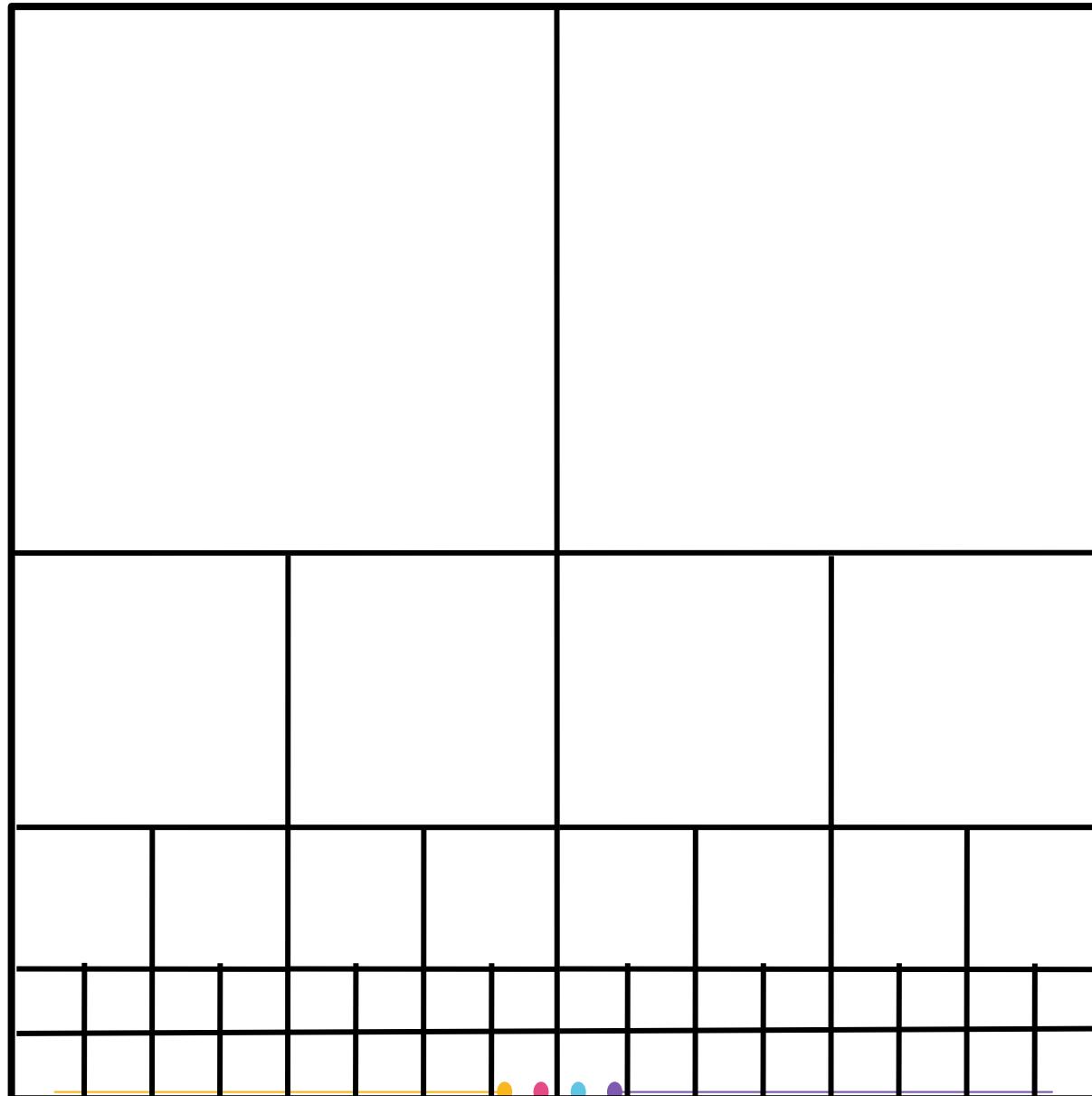
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

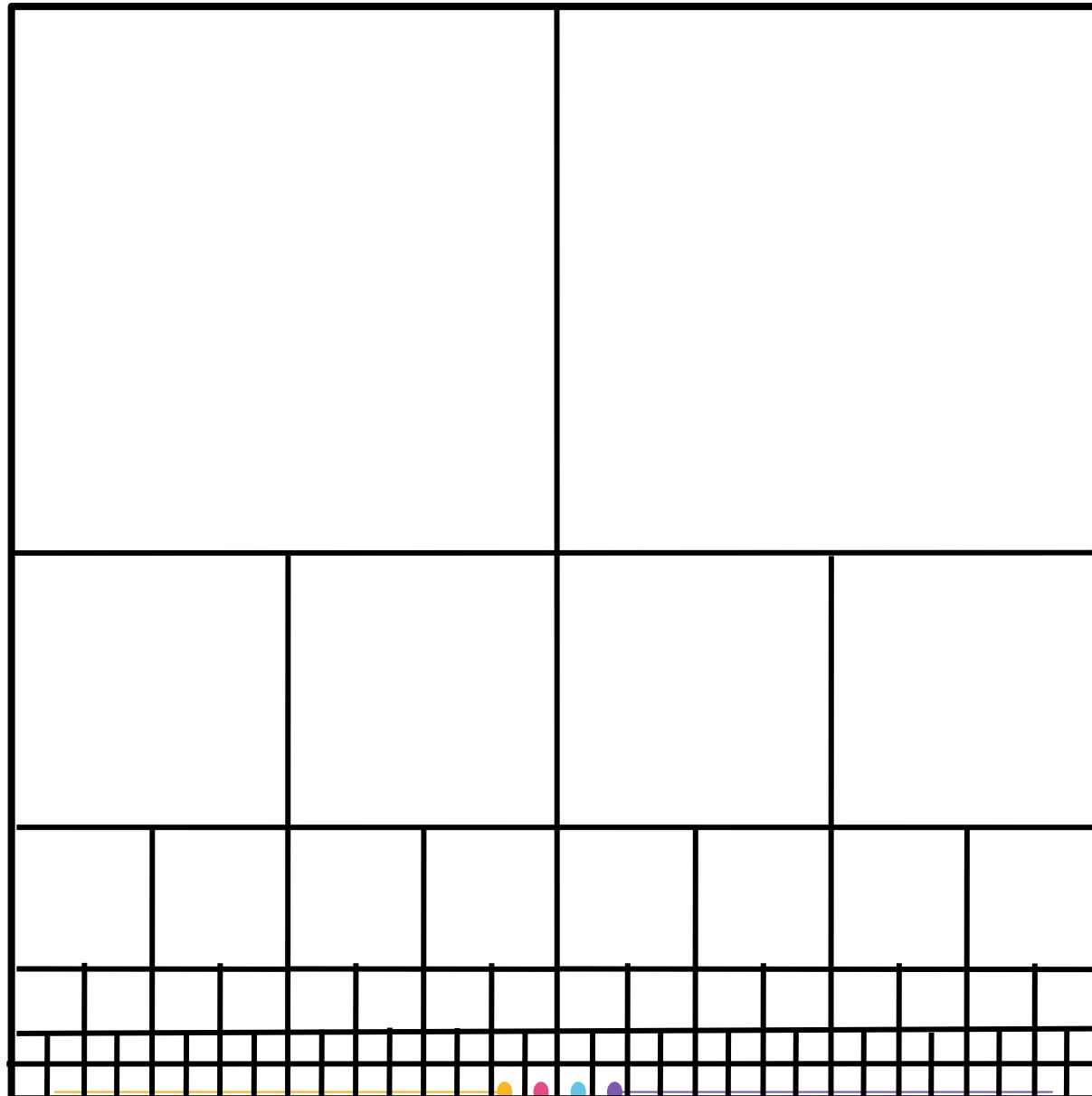
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

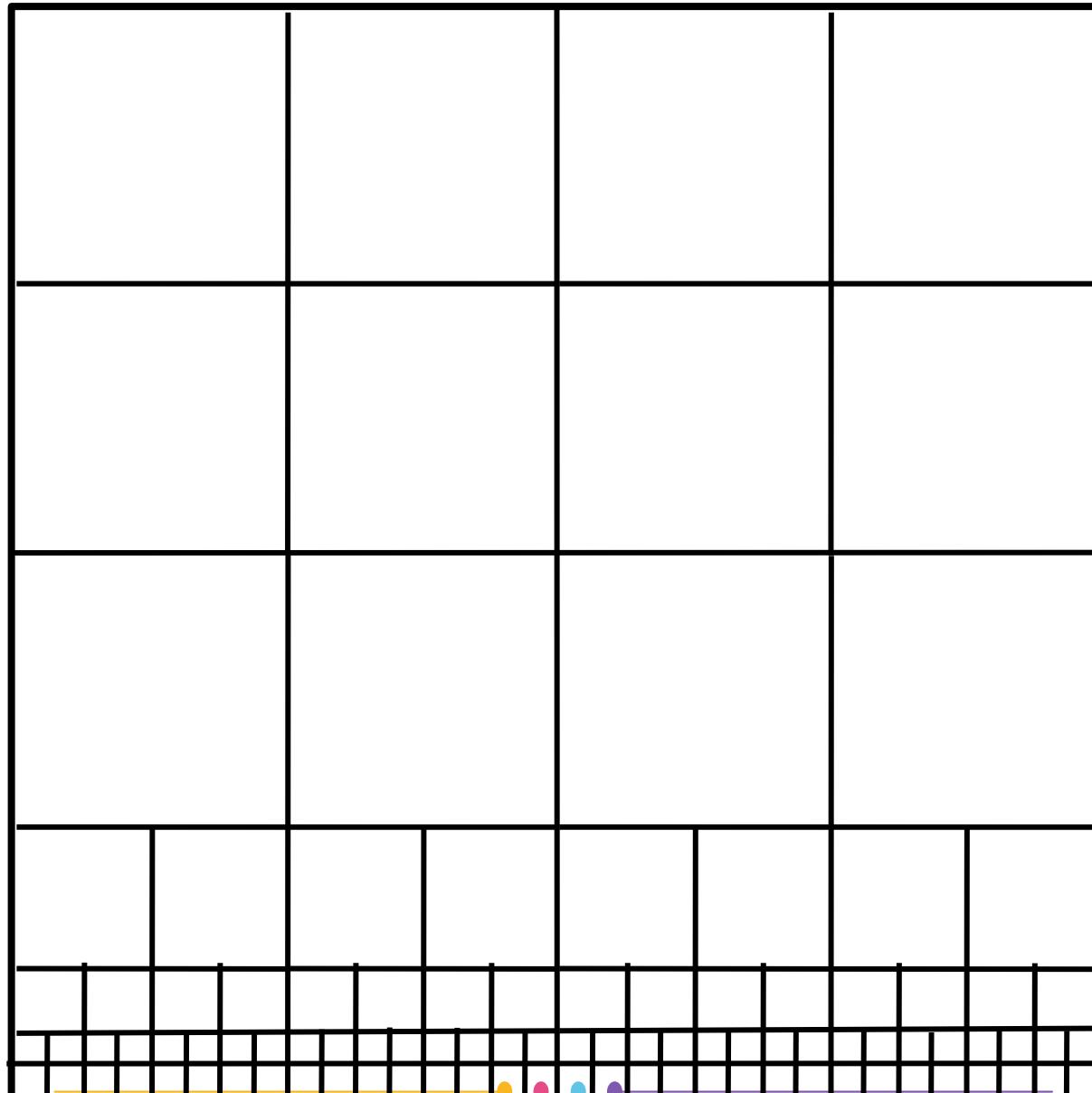
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

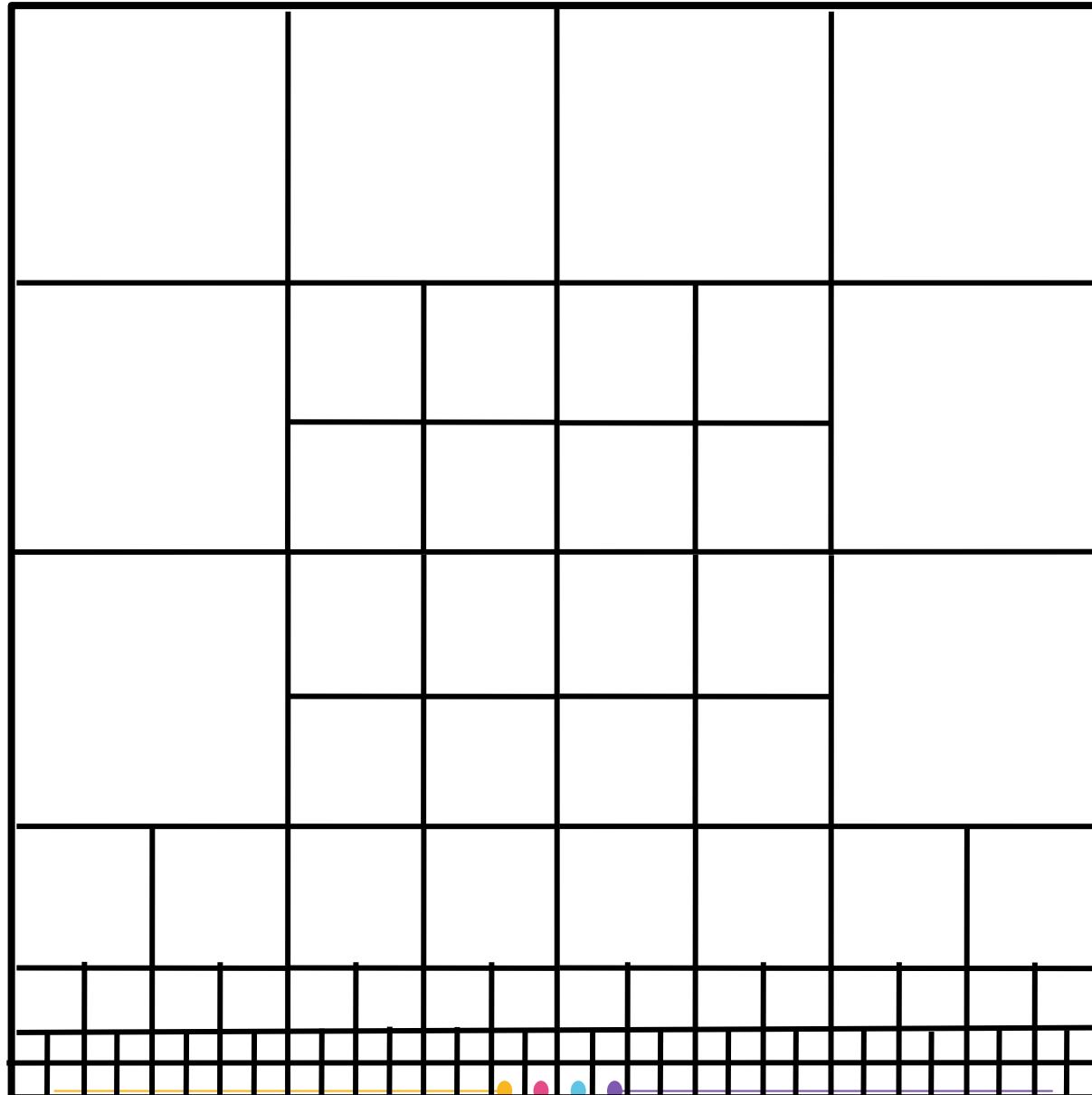
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

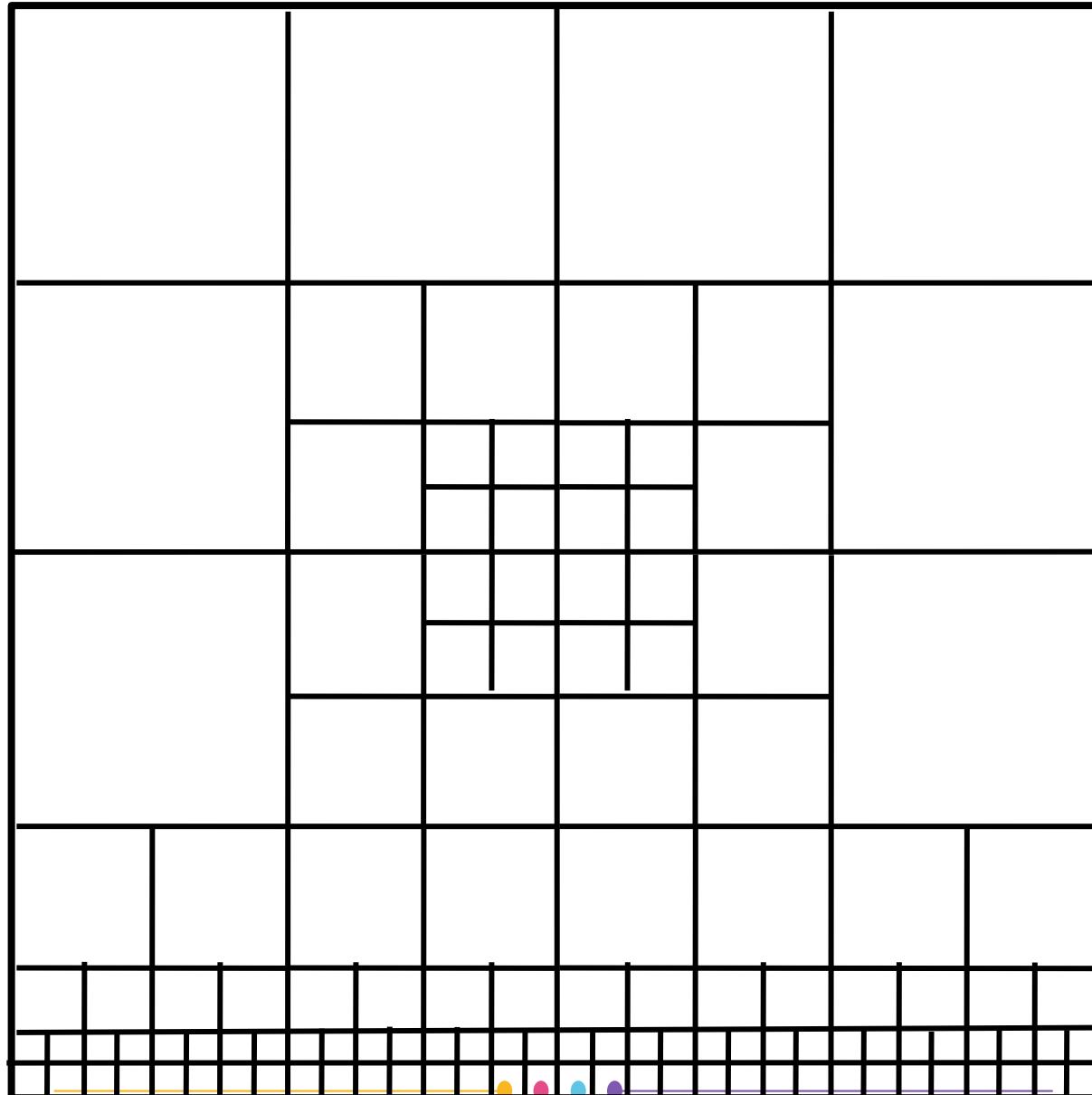
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





# Raffinement des maillages

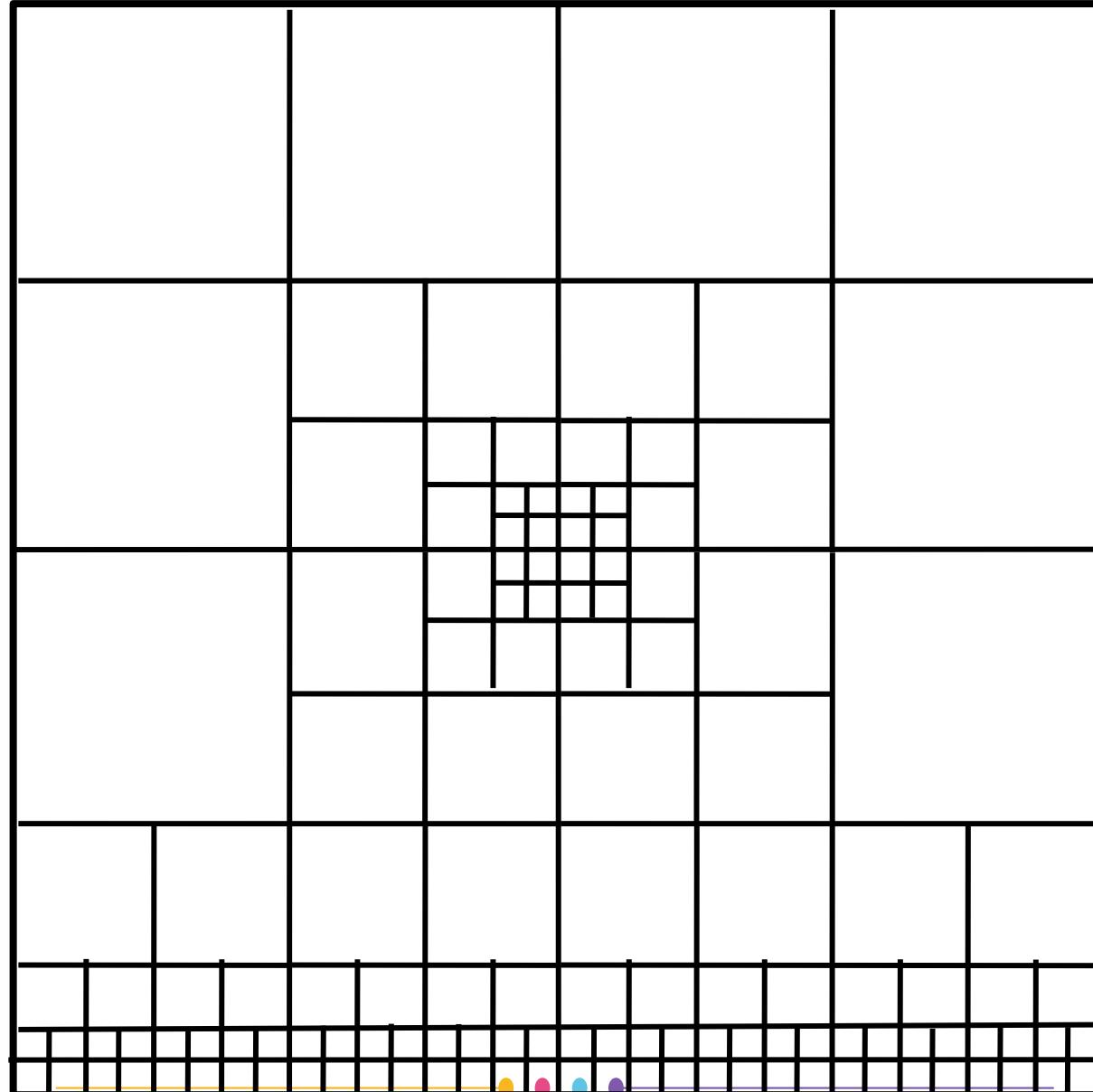
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:





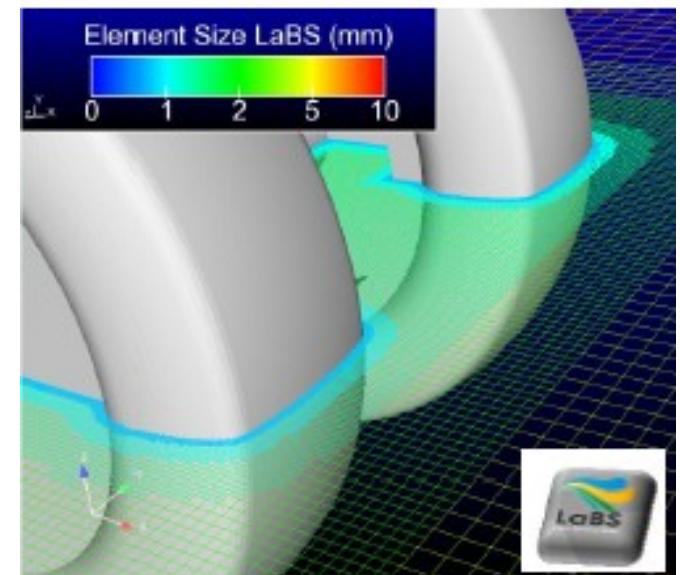
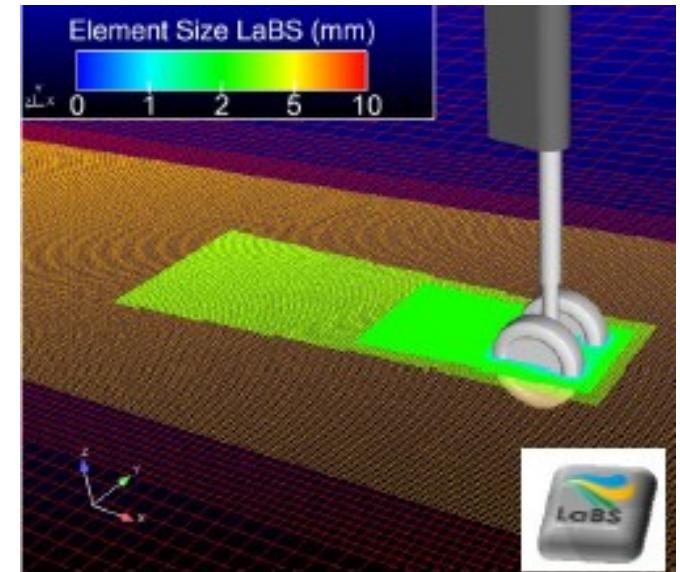
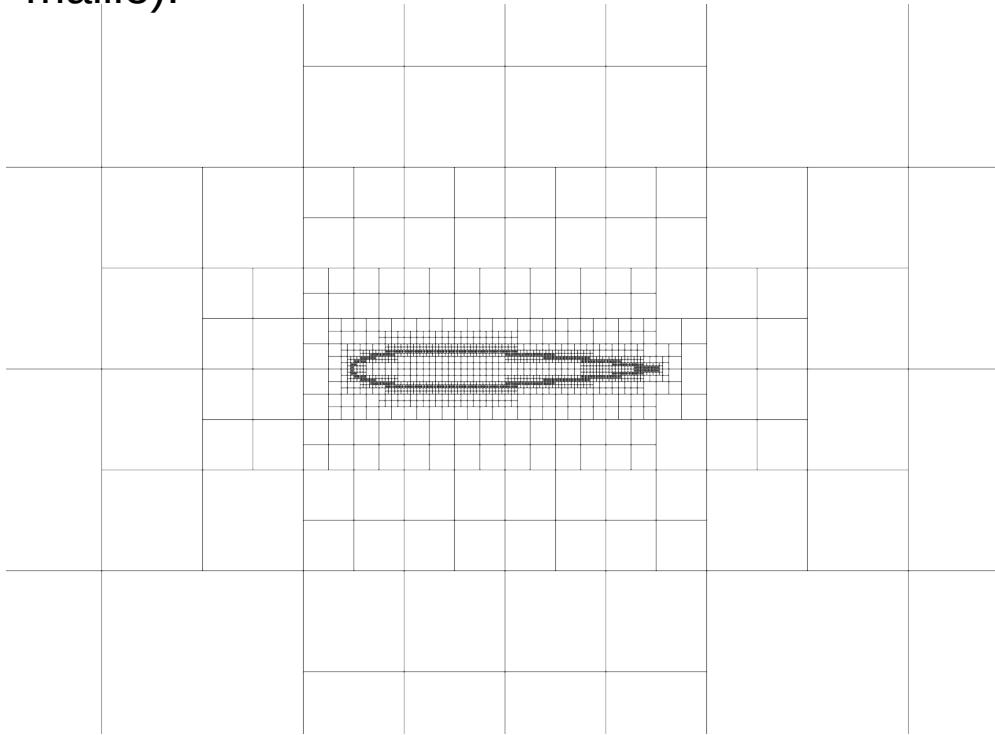
# Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



# Raffinement des maillages

En pratique, on utilise des « Zones de résolutions » imbriquées les unes dans les autres en divisant la taille de maille par deux d'une zone à l'autre jusqu'à obtenir la zone de proche paroi qui possède les plus petites mailles (et donc le plus grand nombre de maille).





# Turbulence et LBM

En LBM le tenseur des contraintes visqueuses est lié à la partie hors équilibre des fonctions de distribution:

$$\tau_{ij} = - \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha,i} \mathbf{c}_{\alpha,j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) = 2\rho\nu^e S_{ij}$$

La viscosité est liée au temps de relaxation:  $\hat{\tau}_g = \frac{\nu\sqrt{3}}{\Delta x c_0} + \frac{1}{2}$

Ainsi on peut prendre en compte les échelles de sous-maille en ajoutant leur dissipation via un temps de relaxation supplémentaire. On peut alors utiliser les modèles de sous-maille standard en utilisant les moments d'ordre 2 pour le calcul du tenseur des déformations.

$$\nu_e = \nu + \nu_t$$

$$\tau_e = \tau + \tau_t$$

$$\nu = \widehat{c_0}^2 \left( \tau_g - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

Le temps de relaxation dépend alors de l'espace et du temps.  $\tau_e(\mathbf{x}, t) \sim S_{ij}(\mathbf{x}, t)$



---



# Modèles de collision avancés

En pratique, le modèle BGK n'est pas utilisé pour les écoulements à hauts Reynolds car il souffre d'instabilités (Peu dissipatif). Aujourd'hui de nombreux modèles de collision existent et permettent de circonvenir aux problèmes inhérents à BGK:

- \* **Modèle MRT (2000)**: Chaque moment est relaxé à l'équilibre par un temps caractéristique propre. La collision se fait alors dans l'espace des moments.
  - \* **Modèles entropiques (2003)**: Basés sur une surrelaxation minimisant l'entropie. Le temps de relaxation dépend de l'espace et du temps.
  - \* **Régularisation (2006)** basées sur une renormalisation de l'équilibre à chaque itération en utilisant les DF pour calculer la partie hors éq.
  - \* **Moment centraux (2013)**: Translation des moments par rapport au référentiel du mouvement moyen.
  - \* **Cumulant (2016)**: Définition non linéaire des moments (cumulants). Les 3 premiers cumulants sont identiques aux moments centraux. Différences à partir des cumulants d'ordre 4.
  - \* **Régularisation hybride (2018)** basées sur une hybridation de la régularisation classique et des polynômes d'Hermite d'ordre 3 et 4 pour la partie hors eq.
- 
- 

# Modèles de collision avancés

**Principe du modèle MRT:**

Chaque moment est relaxé avec un temps propre

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{c}, t + 1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)]$$

*La collision est effectuée  
dans l'espace des moments*

La matrice  $\mathbf{S}$  est diagonale et contient les temps de relaxation (9 pour le D2Q9, 19 pour le D3Q19 ...):  $s_\alpha = 1/\tau_\alpha$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_\nu \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{M}$  permet de construire  $q$  moments : En pratique on peut partir des moments conservés et construire une matrice orthogonale par une procédure de type Gramm-Schmidt.

# Modèles de collision avancés

**Principe du modèle MRT:**

Chaque moment est relaxé avec un temps propre

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{c}, t + 1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)]$$

*La collision est effectuée  
dans l'espace des moments*

Les coefficients de transport sont reliés à différents temps de relaxation:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{\nu} & = & \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_\nu} - \frac{1}{2} \right) \\ \hat{\eta} & = & \hat{\rho} \frac{2}{9} \left( \frac{1}{s_e} - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

Les moments à l'équilibre sont soit calculés simplement à l'aide de  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{m} = \mathbf{Mg}$$

$$\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{Mg}^{eq}$$

Soit calculés pour optimiser la stabilité  
(Analyse de stabilité linéaire)

# Modèles de collision avancés

**Principe des approches régularisées:**

formulation de l'algorithme en fonction uniquement de l'équilibre et de la partie hors équilibre.

$$g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}\right) g_\alpha^{neq}(\mathbf{x}, t)$$

Estimation par  
polynôme et récursivité

$$g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \omega(c_\alpha) \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \mathcal{H}_\alpha^{(k)}(c_\alpha) : \mathbf{a}^{eq,(k)}$$

$$g_\alpha^{heq}(\mathbf{x}, t) = \omega(c_\alpha) \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \mathcal{H}_\alpha^{(k)}(c_\alpha) : \boxed{\mathbf{a}^{heq,(k)}}$$

Utilisation d'une forme récursive des  
polynômes pour le calcul des  $\mathbf{a}$

Estimation locale par  
différences-finies

$$g_\alpha^{neq}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\omega_\alpha \rho \tau_g \Delta t}{c_s^2} (c_{\alpha,i} c_{\alpha,j} - c_s^2 \delta_{ij}) \boxed{S_{ij}}$$

Calcul par différences-finies  
centrée d'ordre > 2





# Synthèse et propriétés générales

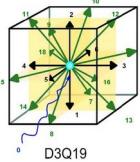
## Avantages

1. La LBM est d'ordre 2 en espace et en temps.
2. La LBM est un algorithme très rapide et très local très facile à paralléliser.
3. Une seule équation générale permet de décrire l'évolution de toutes les grandeurs macroscopiques => Rapidité de calcul
4. Le schéma LBM est compressible et très peu dissipatif donc permet l'étude des phénomènes acoustiques et aéroacoustiques.
5. Les maillages sont structurés et uniforme donc simple à construire.

## Inconvénients

6. Etant faiblement dissipative, la LBM peut être instable et particulièrement lorsque le paramètre  $\tau_{aug}$  est proche de 0.5 (cela correspond à une faible viscosité). En pratique certaines techniques permettent de stabiliser la méthode.
7. La LBM est limitée aux écoulements à faible nombre de Mach ( $<0.3$ ) et isotherme.
8. Nécessite une grande résolution aux parois à cause de la nécessité d'un maillage uniforme (pas de mailles étirées dans la couche limite)





# Sommaire:

## 1. Introduction et aspects historiques

Les automates cellulaires

Les gaz sur réseau

## 2. Fondements théoriques de la LBM

Physique statistique et Equation de Boltzmann

L'équilibre et les collisions

Developpement de Chapman-Enskog

## 3. Discréétisation de l'équation de Boltzmann

Les polynômes d'Hermites

Les quadratures de Gauss-Hermites

Obtention des réseaux standards

Discréétisation de l'espace et du temps

## 4. Elements sur l'algorithme LBM

Particularité de l'algorithme *Stream & Collide*

Conditions aux limites

Rafinement de maillage

Turbulence

Les modèles de collision avancées

## 5. Mise en pratique

Tour d'horizon des codes LBM

TP 1 : Le pulse de pression [d2q4]

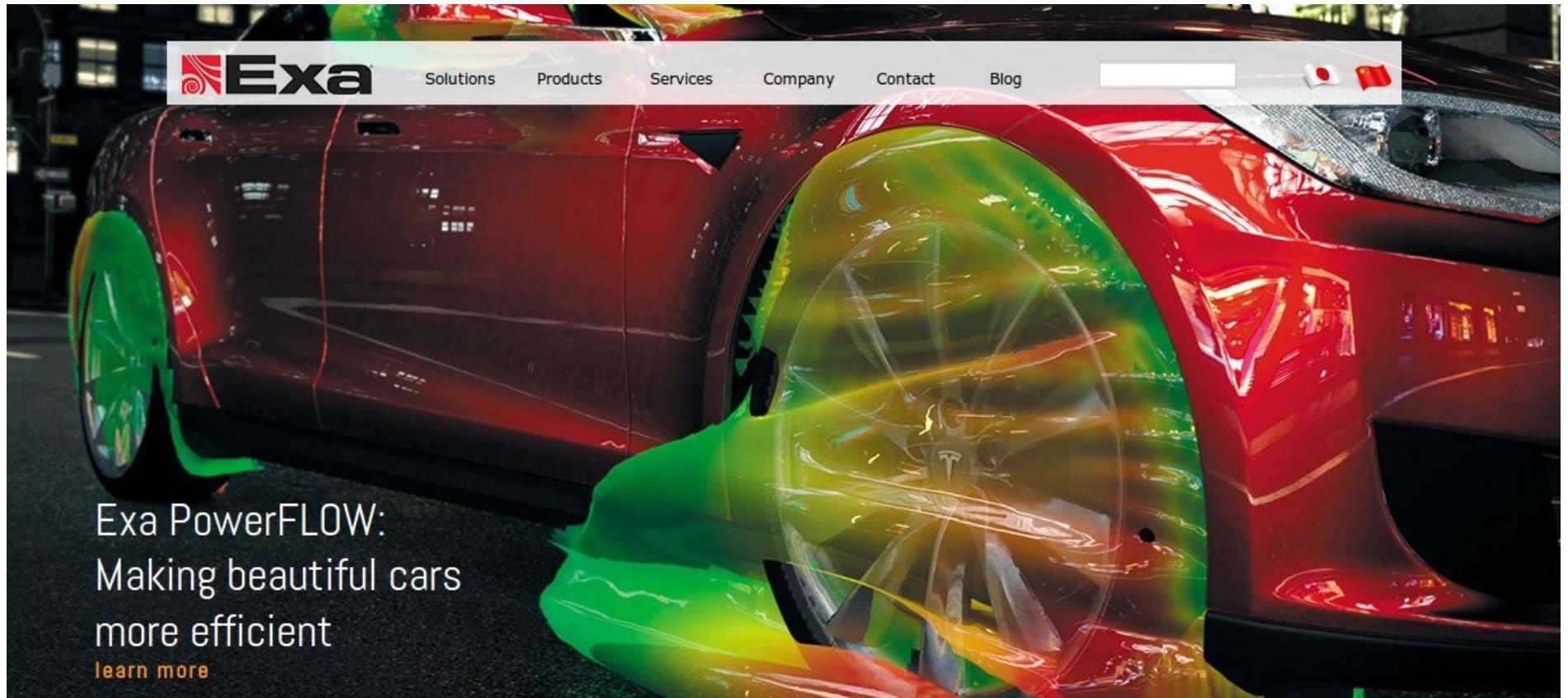
TP 2 : Le cylindre en écoulement Laminaire [d2q9]

TP 3 : La cavité entraînée [d2q9]

TP 4 : Le cylindre en écoulement turbulent [d2q9reg]

# Les codes industriels de la LBM:

## *PowerFlow*



1<sup>er</sup> Code Industriel créé en 1995 par la société EXA basée à Lexington (MA-USA) et racheté par Dassault-Système en 2016.  
Très utilisé par l'industrie Automobile (Ford, Audi, Peugeot,...)

# Les codes industriels de la LBM:



PRODUCTS

LICENSING AND SERVICES

TECHNOLOGY

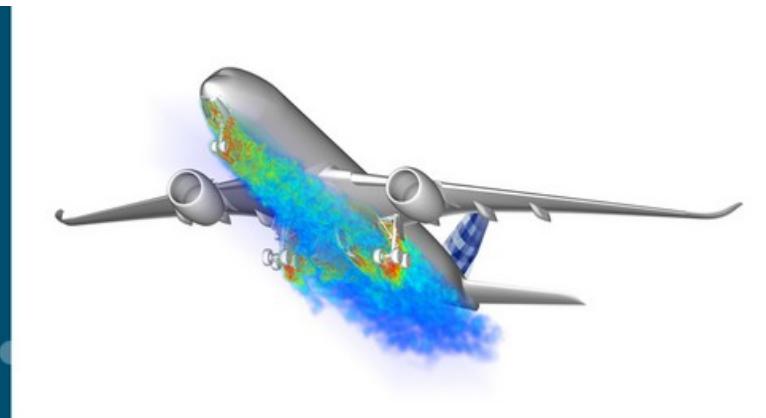
RESEARCH AND  
DEVELOPMENT

SUPPORT CENTER

CONTACT US

Combining performance with accuracy

CLICK HERE

A 3D rendering of a commercial airplane in flight, showing a detailed color-coded simulation of air flow around its body. The simulation highlights areas of high pressure in blue and low pressure in red, illustrating the software's capability for aerodynamic analysis.

## ProLB: high-fidelity CFD in exceptional turnaround times

ProLB is an innovative Computational Fluid Dynamics (CFD) software solution. Based on the Lattice-Boltzmann method, its successfully-validated solver performs inherently transient simulations of highly complex flows with a competitive turnaround time. ProLB's accurate aerodynamic and aeroacoustic modeling allows engineers to make early design decisions that optimize and shorten the product development process.

Code créé en 2010 par des industriels et universitaires Français sous l'impulsion de Renault en collaboration avec Airbus, UPMC, CNRS et ENS. Il est aujourd'hui commercialisé par la société CS.



# Les codes opensources de la LBM: OpenLB

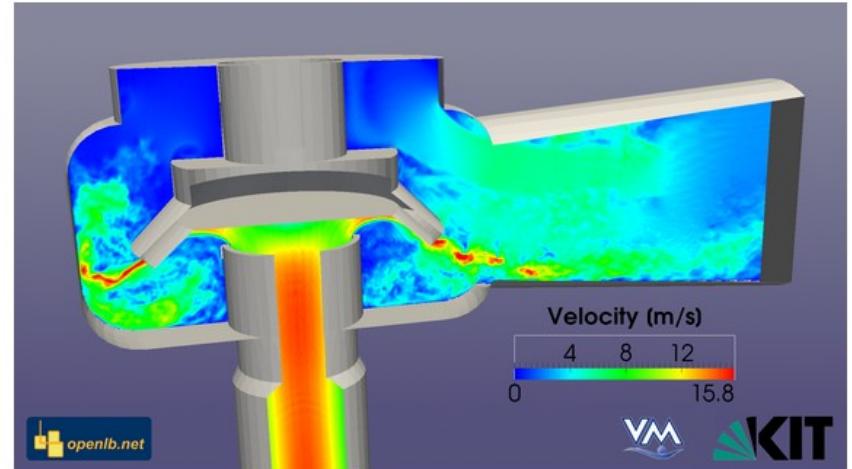
OpenLB – Open Source Lattice Boltzmann Code



Contributeur Principaux:

Langage: C++

Site: <https://www.openlb.net/>



Réseaux :

- D2Q5
- D2Q9
- D3Q7
- D3Q19

Modèles de collisions :

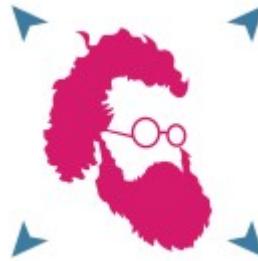
- BGK
- MRT
- Regularisation
- Entropique

Modèles Physiques :

- Turbulence
- Multi espèces
- Milieu Poreux
- Diphasique

# Les codes opensources de la LBM: Palabos

Parallel Lattice Boltzmann Solver.



Contributeur Principaux:

Langage: C++, Python

Site: <https://palabos.unige.ch/>



Réseaux :

- D2Q5
- D2Q9
- D3Q7
- D3Q15
- D3Q19
- D3Q27

Modèles de collisions :

- BGK
- MRT
- Regularisation
- Entropique

Modèles Physiques :

- Turbulence
- Multi espèces
- Milieu Poreux
- Diphasique



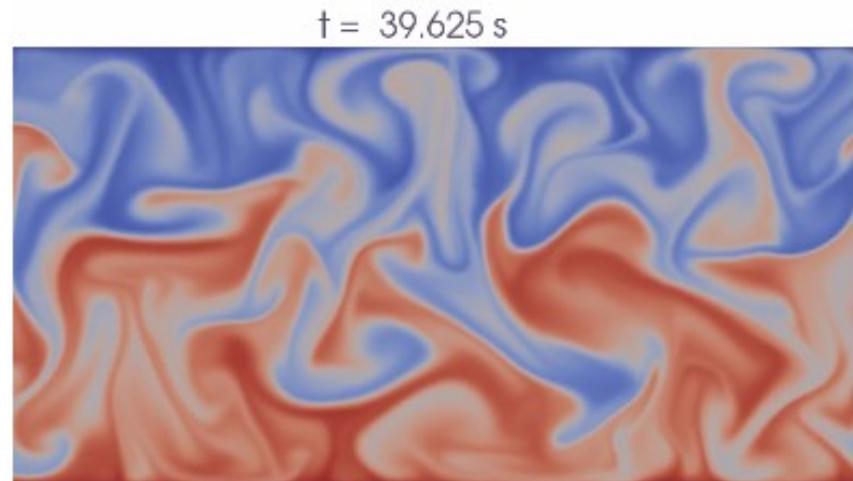
# Les codes opensources de la LBM: PyLBM



Contributeur Principaux:

Langage: Python, C

Site: <https://pylbm.readthedocs.io>



Réseaux :

- Tous
- Construits avec Sympy

Modèles de collisions :

- BGK
- MRT

Modèles Physiques :

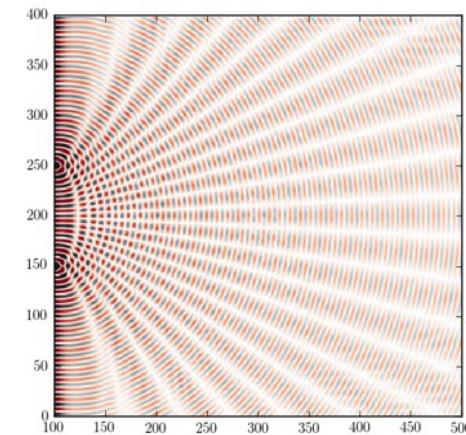
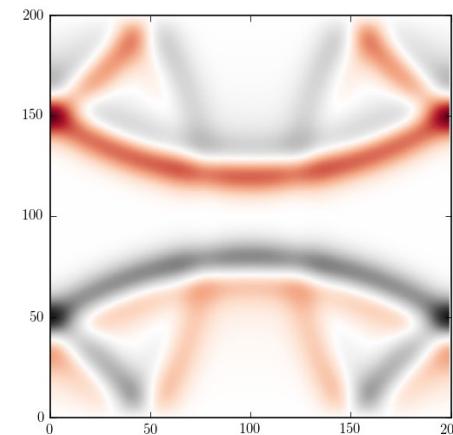
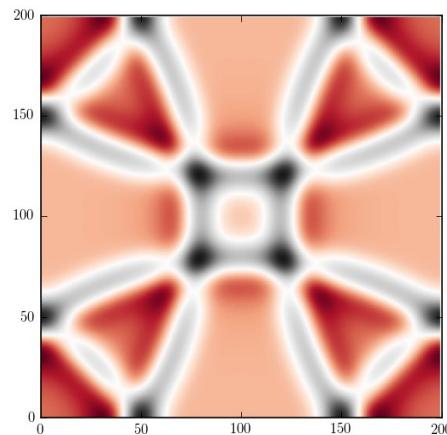
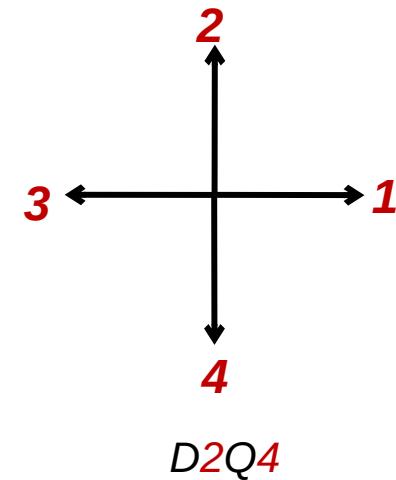
- Turbulence
- Thermique
- Diphasique



# Travaux pratiques:

## TP1: Le Pulse de Pression

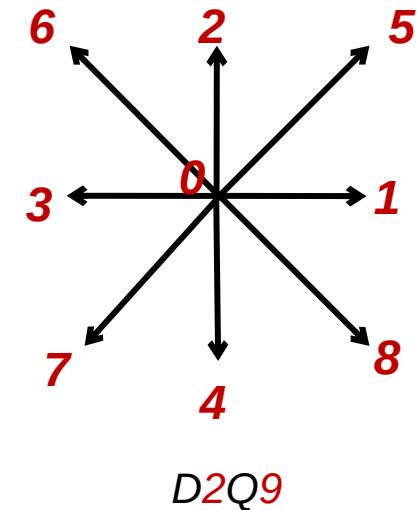
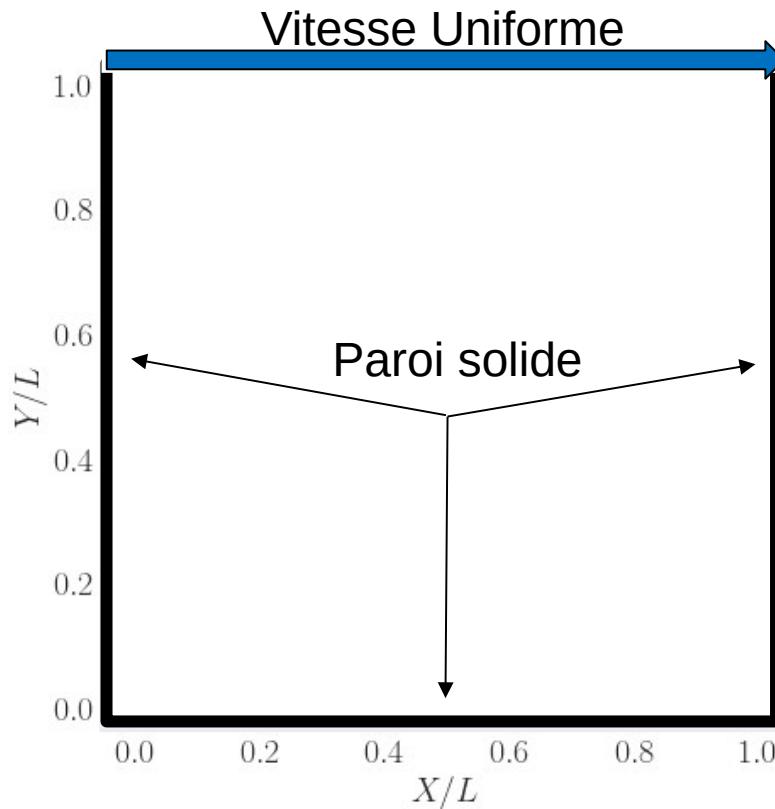
Programmation du modèle D2Q4 pour la simulation d'un pulse de pression et comparaison avec solution analytique. Simulation des fentes d'Young



# Travaux pratiques:

## TP2: La Cavité Entrainée.

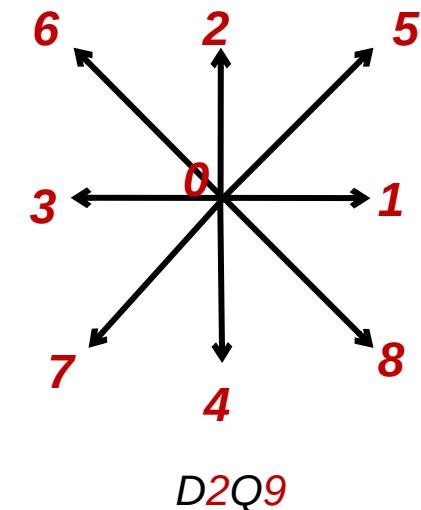
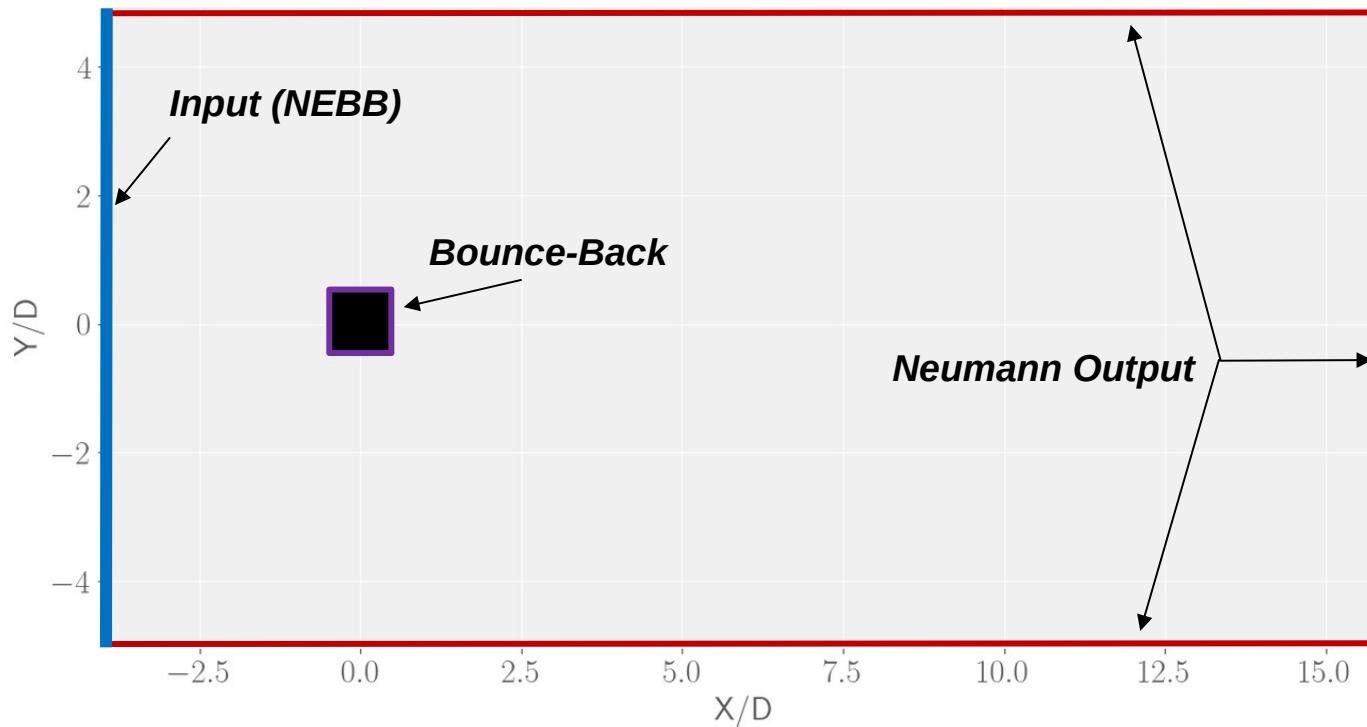
Programmation du modèle D2Q9 pour la simulation de l'écoulement dans une cavité entrainée.



# Travaux pratiques:

## *TP3: Le cylindre carré.*

Programmation du modèle D2Q9 pour la simulation d'un écoulement autour d'un cylindre carré à bas Reynolds



# Travaux pratiques:

## TP4: Les modèles régularisés

Programmation du modèle D2Q9 pour les simulations à plus grand Reynolds avec l'étape de régularisation ou le modèle MRT.

